Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 1

Paul-Louis George, Houman Borouchaki

Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 1.

Paul Louis George, Houman Borouchaki

RESEARCH REPORT
N° 8201
Janvier 2013
Project-Team Gamma3

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--8201--FR+ENG

Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 1.

Paul Louis George*, Houman Borouchaki†

Équipe-Projet Gamma3

Rapport de recherche n° 8201 — Janvier 2013 — 51 pages

Résumé : Ce rapport fait suite aux papiers discutant des éléments finis classiques de Lagrange de degré 2. Ici, on regarde le cas des carreaux de Bézier rationnels non pas en temps qu'ingrédients de base d'une méthode de définition de surfaces (application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$) mais en temps qu'éléments support de calculs (application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$). Dans ce cas, se pose la question de la positivité du jacobien de cette transformation. C'est donc ce point que nous regardons pour un carreau quadrilatéral et un carreau hexaédrique. La partie 2 de ce rapport regarde le cas des triangles et des tétraèdres.

Mots-clés : Courbe de Bézier rationnelle. Carreau de Bézier rationnel. Quadrilatère. Hexaèdre.

* INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: paul-louis.george@inria.fr

† UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, Université de Technologie de Troyes, BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France. email: houman.borouchaki@utt.fr ou @inria.fr

RESEARCH CENTRE
PARIS – ROCQUENCOURT

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Rational Bezier patches of degree 2. Part 1.

Abstract: Following our previous reports related to classical Lagrange finite elements of degree 2, we consider the case of rational Bézier patches not as a method to define a surface (and then a mapping from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$) but as the support of a calculus (therefore a mapping from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$). In this usage, the jacobian of the mapping must be positive and this is the point discussed in this report for both a quad patch and a hex patch. Part 2 discusses the case of triangular and tet patches.

Key-words: Rational Bézier curve. Rational Bézier patch. Quad. Hex.

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Courbe de Bézier rationnelle de degré 1 **4**

3 Carreau de Bézier rationnel de degré 1 **4**
3.1 Méthode globale directe . . . 5
3.2 Méthode formelle par composantes . . . 10
3.2.1 Calcul du jacobien . . . 11
3.2.2 Les coefficients du jacobien . . . 13
3.2.3 Réduction du jacobien . . . 15
3.3 Réduction directe du jacobien . . . 18
3.4 Conclusion sur le carreau de degré 1 . . . 20

4 Courbe de Bézier rationnelle de degré 2 **20**
4.1 La courbe . . . 21
4.2 La tangente . . . 22

5 Carreau de Bézier rationnel de degré 2 **24**
5.1 Méthode globale directe . . . 24
5.2 Méthode formelle par composantes . . . 27
5.3 Réduction directe du jacobien . . . 34
5.4 Calculs des coefficients . . . 36
5.5 Conclusion sur le carreau quadrilatéral de degré 2 . . . 40

6 Extension au carreau volumique **40**
6.1 Méthode formelle par composantes . . . 42
6.2 Réduction directe du jacobien . . . 44
6.3 Conclusion sur le carreau hexaédrique de degré 2 . . . 48
6.4 Expression pour le carreau hexaédrique de degré 1 . . . 49

7 Conclusion **51**

1 Introduction

L'utilisation d'éléments finis de degré autre que 1 nous a amené à examiner les éléments finis classiques de Lagrange de degré 2, par exemple pour le quadrilatère dans [3] et pour l'hexaèdre dans [4], en exhibant des condition suffisantes (nécessaires et suffisantes dans certains cas) assurant la positivité du jacobien (le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation). On a vu que ces éléments (dans leur version complète) ne sont autres que des carreaux de Bézier. Dans le formalisme éléments finis, les éléments sont définis via les fonctions de forme et les nœuds, dans l'écriture sous forme de Bézier, ces mêmes éléments sont définis par les polynômes de Bernstein et les points de contrôle, avec un passage immédiat d'une écriture à l'autre.

L'idée de prendre comme fonction de forme pour effectuer un calcul, les fonctions définissant la géométrie est une idée ancienne récemment remise à la mode[1] et largement exploitée. Les fonctions utilisées en CAO peuvent être des Bézier (et on retrouve les éléments finis de Lagrange) ou d'autres type de description comme les Bézier rationnels, les B-splines, les Nurbs, etc. La partie géométrique (la CAO) ne s'est pas directement intéréssée au prérequis permettant d'effectuer correctement des calculs avec ses propres fonctions. En particulier, nous n'avons pas trouvé de discussion sur le signe du jacobien[2] des transformations utilisées. L'objet de ce rapport est justement de regarder ce problème en examinant le cas des Bézier rationnels et plus précisément au degré 2.

[1] voir tout ce qui a trait à l'"isogeometric analysis".
[2] Notons que le jacobien n'est défini que pour des applications de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, c'est dire que l'espace des paramètres et l'espace physique sont les mêmes excluant de fait le cas des surfaces.

Étudier directement le degré 2 nous a semblé quelque peu délicat aussi, dans une première partie, on revient au degré 1 qui, même s'il ne présente pas de réel intérêt, permet de commencer à se familiariser avec les Bézier rationnels et quelques uns de leurs aspects. En particulier, le degré des polynômes jacobiens[3] n'est pas celui auquel on pouvait, *a priori*, s'attendre. Dans ce cas, on pensait à un polynôme 2×2 et on trouve un polynôme 1×1 qui est identique à celui obtenu pour un carreau de Bézier classique.

La seconde partie concerne le degré 2. De même un calcul direct indique que le degré est 6×6 alors que, en affinant l'analyse, nous ne trouvons que le degré 5×5 puis à 4×4, réduction de degré immédiate aux bords mais purement formelle pour le carreau lui-même, nous n'avons pas réussi à faire mieux.

Avant de conclure, on regarde le cas d'un carreau volumique (hexaèdre) de degré 2. Dans ce cas, l'analys exhibe un degré $7 \times 7 \times 7$ mais on montre qu'il se réduit à un degré $6 \times 6 \times 6$. Le cas, sans réel intérêt, du degré 1 est déduit de la discussion.

Du point de vue pratique, le calcul des coefficients de contrôle devra être réalisé via un programme.

2 Courbe de Bézier rationnelle de degré 1

Certainement d'un intérêt limité (si ce n'est de modifier la position des points, par exemple le milieu), cette courbe (un segment de droite) est regardée pour faciliter la compréhension des courbes de degré 2.

Pour définir la courbe, on se donne des points de contrôle P_i et des poids ω_i supposés positifs. L'expression de la courbe est :

$$\gamma(u) = \frac{\sum_{i=0,1} B_i^1(u)\omega_i P_i}{\sum_{i=0,1} B_i^1(u)\omega_i}\,, u \in [0,1]\,, \tag{1}$$

c'est-à-dire simplement :

$$\gamma(u) = \frac{(1-u)\omega_0 P_0 + u\omega_1 P_1}{(1-u)\omega_0 + u\omega_1} \;=\; \frac{(1-u)\omega_0 P_0 + u\omega_1 P_1}{D(u)} \text{ en posant } D(u) = (1-u)\omega_0 + u\omega_1\,.$$

Un calcul direct donne la tangente, on a :

$$D(u)^2 \gamma(u)' = \omega_0 \omega_1 \overrightarrow{P_0 P_1}\,,$$

la tangente est parallèle au segment. À noter que l'on pouvait s'attendre à trouver une expression de degré 1 au numérateur alors que l'on ne trouve qu'une expression de degré 0, caractéristique qui sera confirmée en discutant du degré 2. Quand les poids sont égaux, on retrouve le cas classique.

3 Carreau de Bézier rationnel de degré 1

Comme ci-dessus pour les courbes, ce carreau est regardé pour faciliter la compréhension des carreaux de degré 2. Pour définir un carreau, on se donne des points de contrôle P_{ij} et des poids ω_{ij} supposés positifs. L'expression du carreau est :

$$\sigma(u,v) = \frac{\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij}P_{ij}}{\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij}}\,, (u,v) \in [0,1] \times [0,1]\,.$$

Remarque : Quand tous les ω_{ij}, sont égaux, le carreau est un carreau de Bézier classique.

Pour discuter du signe du jacobien de cette transformation, on va exprimer ses dérivées. On note $D(u,v) = \sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij}$.

[3] On verra, en fait, que l'on se débarrasse du dénominateur et que le polynôme étudié n'est pas le vrai jacobien mais se comporte, pour ce qui a trait à son signe, comme lui.

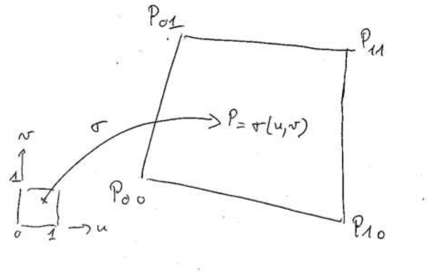

FIG. 1 – *Le carreau, ses points de contrôle et ses sommets (qui sont identiques).*

3.1 Méthode globale directe

La dérivée en u s'écrit :

$$\frac{\partial\sigma(u,v)}{\partial u} = \frac{D(u,v)\frac{\partial}{\partial u}\left(\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij}P_{ij}\right) - \frac{\partial D(u,v)}{\partial u}(\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij}P_{ij})}{D(u,v)^2},$$

soit :

$$\frac{D(u,v)\sum_{j=0,1} B_j^1(v)\Delta_{0j}^{10} - (\sum_{j=0,1} B_j^1(v)\delta_{0j}^{10})(\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij}P_{ij})}{D(u,v)^2},$$

avec

$$\Delta_{ij}^{10} = \omega_{i+1,j}P_{i+1,j} - \omega_{ij}P_{ij}$$

et

$$\delta_{ij}^{10} = \omega_{i+1,j} - \omega_{ij}\,.$$

Le comportement, comme le dénominateur est positif, est celui de

$$D(u,v)\sum_{j=0,1} B_j^1(v)\Delta_{0j}^{10} - (\sum_{j=0,1} B_j^1(v)\delta_{0j}^{10})(\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij}P_{ij})\,,$$

soit :

$$(\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij})(\sum_{j=0,1} B_j^1(v)\Delta_{0j}^{10}) - (\sum_{j=0,1} B_j^1(v)\delta_{0j}^{10})(\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij}P_{ij})\,,$$

qui s'écrit, par regroupement,

$$\sum_{i=0,1}\sum_{j_1=0,1}\sum_{j_2=0,1} B_i^1(u)B_{j_1}^1(v)B_{j_2}^1(v)(\omega_{ij_1}\Delta_{0j_2}^{10} - \delta_{0j_1}^{10}\omega_{ij_2}P_{ij_2})\,.$$

Le terme $(\omega_{ij_1}\Delta_{0j_2}^{10} - \delta_{0j_1}^{10}\omega_{ij_2}P_{ij_2})$ qui s'exprime également comme $(\omega_{ij_2}\Delta_{0j_1}^{10} - \delta_{0j_2}^{10}\omega_{ij_1}P_{ij_1})$ s'écrit

$$\omega_{ij_1}(\omega_{1j_2}P_{1j_2} - \omega_{0j_2}P_{0j_2}) - (\omega_{1j_1} - \omega_{0j_1})\omega_{ij_2}P_{ij_2}\,,$$

ou encore

$$\omega_{ij_1}\omega_{1j_2}P_{1j_2} - \omega_{ij_1}\omega_{0j_2}P_{0j_2} - \omega_{1j_1}\omega_{ij_2}P_{ij_2} + \omega_{0j_1}\omega_{ij_2}P_{ij_2}\,.$$

On va alors chercher les contributions en $\omega_{kl}P_{kl}$ pour k et l valant 0 ou 1.

En $\omega_{00}P_{00}$, il vient les contributions de $(i = 0, 1j_1 = 0, 1j_2 = 0), (i = 0j_1 = 0, 1j_2 = 0), (i = 0j_1 = 0, 1j_2 = 0)$

pour le second, le troisième et le quatrième terme, respectivement , en $\omega_{10}P_{10}$, il vient les contributions de $(i=0,1 j_1=0,1 j_2=0),(i=1 j_1=0,1 j_2=0),(i=1 j_1=0,1 j_2=0)$,

pour le premier, le troisième et le quatrième terme, respectivement ,

en $\omega_{01}P_{01}$, il vient les contributions de $(i=0,1 j_1=0,1 j_2=1),(i=0 j_1=0,1 j_2=1),(i=0 j_1=0,1 j_2=1)$

pour le second, le troisième et le quatrième terme, respectivement ,

en $\omega_{11}P_{11}$, il vient les contributions de $(i=0,1 j_1=0,1 j_2=1),(i=1 j_1=0,1 j_2=1),(i=1 j_1=0,1 j_2=1)$,

pour le premier, le troisième et le quatrième terme, respectivement .

Soit, pour le terme en $\omega_{00}P_{00}$:

$$-\omega_{00}B_0^1(u)B_0^1(v)B_0^1(v)-\omega_{01}B_0^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)-\omega_{10}B_1^1(u)B_0^1(v)B_0^1(v)-\omega_{11}B_1^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)$$
$$-\omega_{10}B_0^1(u)B_0^1(v)B_0^1(v)-\omega_{11}B_0^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)$$
$$+\omega_{00}B_0^1(u)B_0^1(v)B_0^1(v)+\omega_{01}B_0^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)\,,$$

qui se simplifie en :

$$-\omega_{10}B_1^1(u)B_0^1(v)B_0^1(v)-\omega_{11}B_1^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)$$
$$-\omega_{10}B_0^1(u)B_0^1(v)B_0^1(v)-\omega_{11}B_0^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)\,,$$

qui se regroupe en :

$$-\omega_{10}(B_1^1(u)+B_0^1(u))B_0^1(v)B_0^1(v)-\omega_{11}(B_1^1(u)+B_0^1(u))B_1^1(v)B_0^1(v)$$

donc, au final, en $\omega_{00}P_{00}$, il reste seulement :

$$-\omega_{10}B_0^1(v)B_0^1(v)-\omega_{11}B_1^1(v)B_0^1(v)\,.$$

Pour le terme en $\omega_{10}P_{10}$:

$$\omega_{00}B_0^1(u)B_0^1(v)B_0^1(v)+\omega_{01}B_0^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)+\omega_{10}B_1^1(u)B_0^1(v)B_0^1(v)+\omega_{11}B_1^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)$$
$$-\omega_{10}B_0^1(u)B_0^1(v)B_0^1(v)-\omega_{11}B_0^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)$$
$$+\omega_{00}B_1^1(u)B_0^1(v)B_0^1(v)+\omega_{01}B_1^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)$$

qui se simplifie en :

$$\omega_{00}B_0^1(u)B_0^1(v)B_0^1(v)+\omega_{01}B_0^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)$$
$$+\omega_{00}B_1^1(u)B_0^1(v)B_0^1(v)+\omega_{01}B_1^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)$$

qui se regroupe en :

$$\omega_{00}(B_0^1(u)+B_1^1(u))B_0^1(v)B_0^1(v)+\omega_{01}(B_1^1(u)+B_0^1(u))B_1^1(v)B_0^1(v)$$

donc, au final, en $\omega_{10}P_{10}$, il reste seulement :

$$\omega_{00}B_0^1(v)B_0^1(v)+\omega_{01}B_1^1(v)B_0^1(v)\,.$$

Le terme en $\omega_{01}P_{01}$ se déduit du terme en $\omega_{00}P_{00}$, il vient donc :

$$-\omega_{10}B_0^1(v)B_1^1(v)-\omega_{11}B_1^1(v)B_1^1(v)\,.$$

Le terme en $\omega_{11}P_{11}$ se déduit de même du terme en $\omega_{10}P_{10}$, il vient donc :

$$\omega_{00}B_0^1(v)B_1^1(v)+\omega_{01}B_1^1(v)B_1^1(v)\,.$$

On réunit tous ces termes, soit la somme :

$$-\omega_{10}\omega_{00}B_0^1(v)B_0^1(v)P_{00}-\omega_{11}\omega_{00}B_1^1(v)B_0^1(v)P_{00}$$

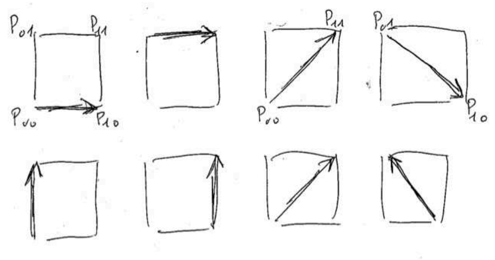

FIG. 2 – *Les vecteurs qui semblent impliqués dans les dérivées.*

$$+\omega_{00}\omega_{10}B_0^1(v)B_0^1(v)P_{10} + \omega_{01}\omega_{10}B_1^1(v)B_0^1(v)P_{10}$$
$$-\omega_{10}\omega_{01}B_0^1(v)B_1^1(v)P_{01} - \omega_{11}\omega_{01}B_1^1(v)B_1^1(v)P_{01}$$
$$\omega_{00}\omega_{11}B_0^1(v)B_1^1(v)P_{11} + \omega_{01}\omega_{11}B_1^1(v)B_1^1(v)P_{11}\,,$$

qui fait apparaitre les vecteurs ci-dessous :

$$\omega_{10}\omega_{00}B_0^1(v)B_0^1(v)\overrightarrow{P_{00}P_{10}} + \omega_{11}\omega_{01}B_1^1(v)B_1^1(v)\overrightarrow{P_{01}P_{11}}$$
$$+\omega_{00}\omega_{11}B_0^1(v)B_1^1(v)\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \omega_{10}\omega_{01}B_0^1(v)B_1^1(v)\overrightarrow{P_{01}P_{10}}\,.$$

Les deux premiers vecteurs sont habituels, les deux autres le sont moins, un simple dessin permet de le vérifier. Ceci s'écrit aussi :

$$\omega_{10}\omega_{00}(1-v)^2\Delta_{00}^{10} + \omega_{11}\omega_{01}v^2\Delta_{01}^{10} + 2v(1-v)\left\{\frac{\omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{01}P_{10}}}{2}\right\}\,,$$

(avec maintenant $\Delta_{ij}^{10} = P_{i+1,j} - P_{ij}$) et la dérivée partielle en u se comporte comme cette combinaison.

Quand les poids sont identiques, il reste le comportement de :

$$(1-v)^2\Delta_{00}^{10} + v^2\Delta_{01}^{10} + 2v(1-v)\left\{\frac{\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \overrightarrow{P_{01}P_{10}}}{2}\right\}\,,$$

qui devient :

$$(1-v)\left\{(1-v)\overrightarrow{P_{00}P_{10}} + v\frac{\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \overrightarrow{P_{01}P_{10}}}{2}\right\} + v\left\{\overrightarrow{P_{01}P_{11}} + (1-v)\frac{\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \overrightarrow{P_{01}P_{10}}}{2}\right\}\,,$$

on ouvre alors les vecteurs (des fractions) en P_{10}, P_{00}, P_{01} et P_{11} respectivement, il vient :

$$(1-v)\left\{(1-v)\overrightarrow{P_{00}P_{10}} + v\frac{\overrightarrow{P_{00}P_{10}} + \overrightarrow{P_{10}P_{11}} + \overrightarrow{P_{01}P_{00}} + \overrightarrow{P_{00}P_{10}}}{2}\right\}$$
$$+v\left\{v\overrightarrow{P_{01}P_{11}} + (1-v)\frac{\overrightarrow{P_{00}P_{01}} + \overrightarrow{P_{01}P_{11}} + \overrightarrow{P_{01}P_{11}} + \overrightarrow{P_{11}P_{10}}}{2}\right\}\,,$$

qui se simplifie en :

$$(1-v)\left\{\overrightarrow{P_{00}P_{10}} + v\frac{\overrightarrow{P_{10}P_{11}} + \overrightarrow{P_{01}P_{00}}}{2}\right\} + v\left\{\overrightarrow{P_{01}P_{11}} + (1-v)\frac{\overrightarrow{P_{00}P_{01}} + \overrightarrow{P_{11}P_{10}}}{2}\right\}\,,$$

qui se réduit encore en :

$$(1-v)\overrightarrow{P_{00}P_{10}} + v\overrightarrow{P_{01}P_{11}}\,,$$

c'est-à-dire le cas du carreau de degré 1 classique.

La dérivée en u se comporte donc comme :

$$\omega_{10}\omega_{00}(1-v)^2\Delta_{00}^{10} + \omega_{11}\omega_{01}v^2\Delta_{01}^{10} + 2v(1-v)\left\{\frac{\omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{01}P_{10}}}{2}\right\},$$

on en déduit que la dérivée en v se comporte comme :

$$\omega_{01}\omega_{00}(1-u)^2\Delta_{00}^{01} + \omega_{11}\omega_{10}u^2\Delta_{10}^{01} + 2u(1-u)\left\{\frac{\omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{10}P_{01}}}{2}\right\}.$$

Dans le cas où les points de contrôle sont dans $\mathbb{R}^2$, le jacobien de la transformation est bien défini. Le résultat est que ce jacobien se comporte comme le déterminant des deux vecteurs calculés ci-dessus, donc comme un polynôme de degré 2×2 possédant 9 coefficients. Ceci donne une condition suffisante de positivité (puisque les termes en u et v sont positifs ou nuls mais bornés par 1). En résumé, aux sommets, on doit avoir la stricte positivité (condition nécéssaire) alors que ailleurs, pour les 5 coefficients restants, il suffit d'être non négatif.

Simplification de l'analyse. Peut on affiner ce résultat ? À cause des poids, il n'est pas *a priori* possible de simplifier l'expression générale, par contre la condition que chaque coefficient soit positif ou non négatif si les poids sont tous de même signe (positifs donc) s'exprime, comme on va le montrer, avec uniquement les vecteurs classiques et on retrouve les 4 triangles coins. Ainsi la première condition est

$$\omega_{10}\omega_{00}\omega_{01}\omega_{00}\,|\Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{00}^{01}| > 0\,,$$

soit simplement :

$$|\Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{00}^{01}| > 0\,,$$

et les quatre conditions analogues donnent la même condition. Il reste *a priori* cinq coefficients dont quatre ont le même aspect, par exemple, pour l'un d'entre eux et son premier terme :

$$\omega_{10}\omega_{00}\omega_{00}\omega_{11}\,|\Delta_{00}^{10} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}| \geq 0\,,$$

soit simplement :

$$|\Delta_{00}^{10} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}| \geq 0\,,$$

ou :

$$|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}| \geq 0\,,$$

en ouvrant $\overrightarrow{P_{00}P_{11}}$ en P_{10}, il reste la condition :

$$|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}| \geq 0\,,$$

soit :

$$|\Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{10}^{01}| \geq 0\,,$$

qui est aussi relatif à un triangle coin. Ainsi, ne reste à discuter que les coefficients relatifs à :

$$|\,\omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{10}P_{01}}\,|\,,$$

que l'on simplifie. Il reste :

$$|\,\omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} \quad \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{10}P_{01}}\,| + |\,\omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}}\,|\,,$$

ou encore, au coefficient près :

$$2|\,\overrightarrow{P_{00}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{01}}\,| \geq 0\,,$$

qui est trivialement vérifié si les quatre déterminants coins sont positifs, ce qui revient à dire que le carreau est convexe. Ainsi, les 4 coefficients coins contrôlent l'élément comme dans le cas classique. Une autre manière de voir ce résultat est d'ouvrir chacun des deux vecteurs (identiques) des deux façons possibles pour faire apparaître les quatre coins.

Réduction du polynôme. Le fait que seuls les coefficients coins contrôlent le polynôme suggère que son degré peut être réduit. On repart donc de :

$$\overrightarrow{U} = \omega_{10}\omega_{00}(1-v)^2\Delta_{00}^{10} + \omega_{11}\omega_{01}v^2\Delta_{01}^{10} + 2v(1-v)\left\{\frac{\omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{01}P_{10}}}{2}\right\},$$

et

$$\overrightarrow{V} = \omega_{01}\omega_{00}(1-u)^2\Delta_{00}^{01} + \omega_{11}\omega_{10}u^2\Delta_{10}^{01} + 2u(1-u)\left\{\frac{\omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{10}P_{01}}}{2}\right\},$$

et on regarde :

$$|\overrightarrow{U} \quad \overrightarrow{V}\,|,$$

qui donne, avec des notations appropriées, le polynôme :

$$\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)N_{ij}\,.$$

On va calculer N_{00}, N_{20} puis N_{10} et N_{01} et, enfin, N_{11}. Il vient :

$$N_{00} = \omega_{10}\omega_{00}\omega_{01}\omega_{00}\,|\Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{00}^{01}| = \omega_{10}\omega_{00}\omega_{01}\omega_{00}\,|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}|,$$

$$N_{20} = \omega_{11}\omega_{10}\omega_{10}\omega_{00}\,|\Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{10}^{01}| = \omega_{11}\omega_{10}\omega_{10}\omega_{00}\,|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}|,$$

puis

$$N_{10} = \omega_{10}\omega_{00}\,|\Delta_{00}^{10} \quad \frac{\omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{10}P_{01}}}{2}|,$$

$$2N_{10} = \omega_{10}\omega_{00}\omega_{00}\omega_{11}|\Delta_{00}^{10} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}\,| + \omega_{10}\omega_{00}\omega_{01}\omega_{10}|\Delta_{00}^{10} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{01}}|,$$

$$2N_{10} = \omega_{10}\omega_{00}\omega_{00}\omega_{11}|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}\,| + \omega_{10}\omega_{00}\omega_{01}\omega_{10}|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{01}}|,$$

et, en ouvrant en P_{10} et P_{00}, il reste :

$$2N_{10} = \omega_{10}\omega_{00}\omega_{00}\omega_{11}|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}\,| + \omega_{10}\omega_{00}\omega_{01}\omega_{10}|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}|,$$

dont on va examiner le terme $\omega_{10}\omega_{00}\omega_{01}\omega_{10}|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}|$, enfin :

$$N_{01} = \omega_{01}\omega_{00}|\left\{\frac{\omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{01}P_{10}}}{2}\right\} \quad \Delta_{00}^{01}|,$$

$$2N_{01} = \omega_{01}\omega_{00}\omega_{00}\omega_{11}|\overrightarrow{P_{00}P_{11}} \quad \Delta_{00}^{01}| + \omega_{01}\omega_{00}\omega_{01}\omega_{10}|\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \Delta_{00}^{01}|,$$

dont on va examiner le terme $\omega_{01}\omega_{00}\omega_{01}\omega_{10}|\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \Delta_{00}^{01}|$ soit en fait, en ouvrant en P_{00} le premier vecteur, $\omega_{01}\omega_{00}\omega_{01}\omega_{10}|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}|$. Pour finir on regarde N_{11}, on a :

$$4N_{11} = |\omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} + \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{10}P_{01}}|,$$

$$4N_{11} = |\omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} \quad \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{10}P_{01}}| + |\omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}}|,$$

$$4N_{11} = |\omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} \quad \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{10}P_{01}}| + |\omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}}|,$$

$$4N_{11} = |\omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}} \quad \omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{10}P_{01}}| + |\omega_{01}\omega_{10}\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \omega_{00}\omega_{11}\overrightarrow{P_{00}P_{11}}|,$$

$$4N_{11} = \omega_{00}\omega_{11}\omega_{01}\omega_{10}\left\{|\overrightarrow{P_{00}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{01}}| + |\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}|\right\},$$

on ouvre en P_{10} et en P_{00} le premier terme et en P_{11} et P_{01} le second terme, on obtient (au facteur près) :

$$4N_{11} = |\overrightarrow{P_{00}P_{10}} + \overrightarrow{P_{10}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{00}} + \overrightarrow{P_{00}P_{01}}| + |\overrightarrow{P_{01}P_{11}} + \overrightarrow{P_{11}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}} + \overrightarrow{P_{01}P_{11}}|,$$

et, par enchantement, il ne reste que :

$$4N_{11} = |\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}| + |\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}| + |\overrightarrow{P_{01}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}| + |\overrightarrow{P_{01}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}|\,,$$

dont on va examiner le terme $\omega_{00}\omega_{11}\omega_{01}\omega_{10}|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}|$. On regroupe alors les 4 termes à examiner, soit, en explicitant les Bernstein :

$$(1-u)^2(1-v)^2\omega_{10}\omega_{00}\omega_{01}\omega_{00} + (1-u)^2v(1-v)\omega_{01}\omega_{00}\omega_{01}\omega_{10}$$

$$+\, u(1-u)(1-v)^2\omega_{10}\omega_{00}\omega_{01}\omega_{10} + u(1-u)v(1-v)\omega_{00}\omega_{11}\omega_{01}\omega_{10}\,,$$

factorisant le terme $\omega_{00}(1-u)(1-v)$, il reste :

$$(1-u)(1-v)\omega_{10}\omega_{01}\omega_{00} + (1-u)v\omega_{01}\omega_{01}\omega_{10} + u(1-v)\omega_{10}\omega_{01}\omega_{10} + uv\omega_{11}\omega_{01}\omega_{10}\,,$$

et on peut encore factoriser $\omega_{10}\omega_{01}$, il ne reste que :

$$(1-u)(1-v)\omega_{00} + (1-u)v\omega_{01} + u(1-v)\omega_{10} + uv\omega_{11} = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij}\,,$$

qui est positif, donc, comme le même raisonnement s'applique aux autres autres coefficients qui se regroupent avec les coefficients coins, le polynôme qui nous préoccupe se réduit et on a, au final :

$$\sum_{I=0}^{1}\sum_{J=0}^{1} B_I^1(u)B_J^1(v)N_{IJ}\,,$$

en renommant $N_{10} = N_{20}$, $N_{11} = N_{22}$ et $N_{01} = N_{02}$ et en supprimant le coefficient ayant disparu (par factorisation) avec, donc :

$$N_{00} = \omega_{10}\omega_{00}\omega_{01}\,|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}|$$

$$N_{10} = \omega_{11}\omega_{10}\omega_{00}\,|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}|$$

$$N_{01} = \omega_{00}\omega_{01}\omega_{11}\,|\overrightarrow{P_{01}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}|$$

$$N_{11} = \omega_{10}\omega_{01}\omega_{11}\,|\overrightarrow{P_{01}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}|\,.$$

Ce résultat était prévisible mais totalement caché dans le formalisme (voir également plus bas une autre façon de retrouver cette particularité).

En conclusion. On a établi la condition de validité qui est identique à celle du carreau classique, [3], les poids étant positifs pouvant être enlevés de la formule finale. Il reste à savoir si on pouvait, *a priori*, trouver le polynôme de contrôle au degré 1 dés le départ et non après tous ces calculs (pénibles).

3.2 Méthode formelle par composantes

On considère le point $P = \sigma(u,v)$ et on note (x,y) ses coordonnées. Si (x_{ij}, y_{ij}) désigne les coordonnées du point de contrôle P_{ij}, on a :

$$x = \frac{\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij}x_{ij}}{\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij}}\,,$$

$$y = \frac{\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij}y_{ij}}{\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\omega_{ij}}\,.$$

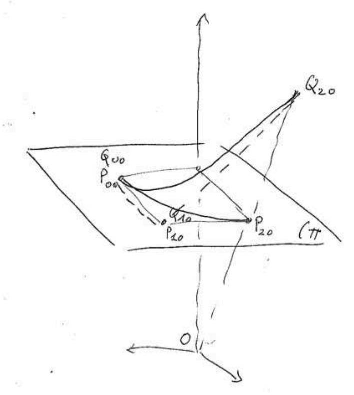

FIG. 3 – *Correspondance $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}^3$, passage par les coordonnées homogènes et projection, le cas d'une arête (ici un arc de cercle, donc au degré 2) du carreau.*

3.2.1 Calcul du jacobien

Le jacobien s'exprime comme le déterminant :

$$\mathcal{J}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} .$$

Si on note $D(u,v) = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \omega_{ij}$, on a :

$$\mathcal{J}(u,v) = \frac{1}{D(u,v)^4} \begin{vmatrix} D(u,v)\frac{\partial X}{\partial u} - X\frac{\partial D(u,v)}{\partial u} & D(u,v)\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial D(u,v)}{\partial v} \\ D(u,v)\frac{\partial Y}{\partial u} - Y\frac{\partial D(u,v)}{\partial u} & D(u,v)\frac{\partial Y}{\partial v} - Y\frac{\partial D(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} ,$$

avec, maintenant, $X = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \omega_{ij} x_{ij}$ et $Y = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \omega_{ij} y_{ij}$, les numérateurs de ces quantités telles que définies initialement.

En développant ce déterminant, on obtient :

$$\frac{1}{D(u,v)^3} \left\{ D(u,v)(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}) + X(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial D(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial D(u,v)}{\partial u}) + Y(\frac{\partial D(u,v)}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial D(u,v)}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}) \right\} ,$$

qui s'écrit aussi comme le déterminant :

$$\frac{1}{D(u,v)^3} \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & X \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & Y \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & Z \end{vmatrix} ,$$

avec $Z = D(u,v)$. Passant dans $\mathbb{R}^3$, on définit les points Q_{ij} par $Q_{ij} = (P_{ij}, \omega_{ij})$, c'est-à-dire de coordonnées $(\omega_{ij} x_{ij}, \omega_{ij} y_{ij}, \omega_{ij} z_{ij})$ avec $z_{ij} = 1$ puis le point Q de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (X, Y, Z) données par :

$$X = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \omega_{ij} x_{ij} ,$$

$$Y = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \omega_{ij} y_{ij} ,$$

$$Z = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \omega_{ij} z_{ij} ,$$

alors ce point de $\mathbb{R}^3$ est défini par un Bézier classique :

$$Q(u,v) = \sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)Q_{ij}\,,$$

et on a (si O désigne l'origine) :

$$\mathcal{J}(u,v) \;=\; \frac{1}{D(u,v)^3}\,|\;\frac{\partial Q}{\partial u}\quad\frac{\partial Q}{\partial v}\quad\overrightarrow{OQ}\,|\,,$$

c'est-à-dire que le jacobien a une interprétation dans l'espace de dimension supérieure. Son signe est celui de :

$$|\;\frac{\partial Q}{\partial u}\quad\frac{\partial Q}{\partial v}\quad\overrightarrow{OQ}\,|\,,$$

et le polynôme correspondant est obtenu en exprimant ces quantités. On trouve comme polynôme :

$$\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1}\sum_{j_1=0,1}\sum_{i_1=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)B_{i_1}^1(u)B_{j_1}^1(v)|\,\Delta_{0j_1}^{10Q}\quad\Delta_{i_10}^{01Q}\quad\overrightarrow{OQ_{ij}}\,|\,,$$

soit 16 coefficients. Dans cette relation, on a $\Delta_{ij}^{10Q} = Q_{i+1j} - Q_{ij}$, $\Delta_{ij}^{01Q} = Q_{ij+1} - Q_{ij}$, dans $\mathbb{R}^3$ donc.

Le terme générique s'écrit :

$$B_i^1(u)B_j^1(v)B_{i_1}^1(u)B_{j_1}^1(v)\begin{vmatrix} \omega_{1j_1}x_{1j_1} - \omega_{0j_1}x_{0j_1} & \omega_{i_11}x_{i_11} - \omega_{i_10}x_{i_10} & \omega_{ij}x_{ij} \\ \omega_{1j_1}y_{1j_1} - \omega_{0j_1}y_{0j_1} & \omega_{i_11}y_{i_11} - \omega_{i_10}y_{i_10} & \omega_{ij}y_{ij} \\ \omega_{1j_1} - \omega_{0j_1} & \omega_{i_11} - \omega_{i_10} & \omega_{ij} \end{vmatrix}\,,$$

À titre d'exercice et avant d'exprimer tous les coefficients, on va exhiber le terme en $(1-u)^2(1-v)^2$. Les (4) termes en $(1-v)^2$ sont obtenus pour $j = j_1 = 0$, soit

$$\begin{vmatrix} \omega_{10}x_{10} - \omega_{00}x_{00} & \omega_{i_11}x_{i_11} - \omega_{i_10}x_{i_10} & \omega_{i0}x_{i0} \\ \omega_{10}y_{10} - \omega_{00}y_{00} & \omega_{i_11}y_{i_11} - \omega_{i_10}y_{i_10} & \omega_{i0}y_{i0} \\ \omega_{10} - \omega_{00} & \omega_{i_11} - \omega_{i_10} & \omega_{i0} \end{vmatrix}\,,$$

le terme en $(1-u)^2(1-v)^2$ s'en déduit en faisant $i = i_1 = 0$, soit :

$$\begin{vmatrix} \omega_{10}x_{10} - \omega_{00}x_{00} & \omega_{01}x_{01} - \omega_{00}x_{00} & \omega_{00}x_{00} \\ \omega_{10}y_{10} - \omega_{00}y_{00} & \omega_{01}y_{01} - \omega_{00}y_{00} & \omega_{00}y_{00} \\ \omega_{10} - \omega_{00} & \omega_{01} - \omega_{00} & \omega_{00} \end{vmatrix}\,,$$

soit, simplement :

$$\begin{vmatrix} \omega_{10}x_{10} & \omega_{01}x_{01} & \omega_{00}x_{00} \\ \omega_{10}y_{10} & \omega_{01}y_{01} & \omega_{00}y_{00} \\ \omega_{10} & \omega_{01} & \omega_{00} \end{vmatrix} = \omega_{00}\omega_{10}\omega_{01}\begin{vmatrix} x_{10} & x_{01} & x_{00} \\ y_{10} & y_{01} & y_{00} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,,$$

expression que l'on développe, il vient :

$$\omega_{00}\omega_{10}\omega_{01}\left\{x_{00}(y_{10} - y_{01}) - y_{00}(x_{10} - x_{01}) + (x_{10}y_{01} - y_{10}x_{01})\right\}\,,$$

qui est identique à :

$$\omega_{00}\omega_{10}\omega_{01}\begin{vmatrix} x_{10} - x_{00} & x_{01} - x_{00} \\ y_{10} - y_{00} & y_{01} - y_{00} \end{vmatrix}\,,$$

donc à $\omega_{00}\omega_{10}\omega_{01}\,|\,\Delta_{00}^{10}\quad\Delta_{00}^{01}\,|$ qui est analogue[4] au résultat trouvé plus haut en réalisant les calculs directement (dans $\mathbb{R}^2$).

[4] avec néanmoins une subtilité, on est ici en $\frac{1}{D^3}$ au lieu de $\frac{1}{D^4}$ et il y a trois poids au lieu de 4, qui, d'ailleurs, n'influent pas.

3.2.2 Les coefficients du jacobien

On repart de l'expression (en omettant le facteur $D(u,v)^3$) trouvée ci-dessus, à savoir :

$$\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1}\sum_{j_1=0,1}\sum_{i_1=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)B_{i_1}^1(u)B_{j_1}^1(v) |\, \Delta_{0j_1}^{10Q} \quad \Delta_{i_10}^{01Q} \quad \overrightarrow{OQ_{ij}}\,| \,.$$

On regroupe les polynômes, soit

$$\sum_{i_1+i=0}^{2}\sum_{j_1+j=0}^{2} B_{i_1+i}^2(u)B_{j_1+j}^2(v)\frac{1}{C_{i_1+i}^2 C_{j_1+j}^2} |\, \Delta_{0j_1}^{10Q} \quad \Delta_{i_10}^{01Q} \quad \overrightarrow{OQ_{ij}}\,| \;=\; \sum_{I=0}^{2}\sum_{J=0}^{2} B_I^2(u)B_J^2(v)N_{IJ}\,,$$

avec $I = i_1 + i$ et $J = j_1 + j$. Ceci nous permet d'exhiber les 9 coefficients de contrôle, les N_{IJ} qui sont analogues à des volumes de tétraèdres (virtuels) ou de telles combinaisons. On a, pour $I = i_1 + i, J = j_1 + j$:

$$N_{IJ} = \sum_{i_1+i=I}\sum_{j_1+j=J} \frac{1}{C_{i_1+i}^2 C_{j_1+j}^2} |\, \Delta_{0j_1}^{10Q} \quad \Delta_{i_10}^{01Q} \quad \overrightarrow{OQ_{ij}}\,| \,.$$

Les 4 coefficients coins. Pour le jeu $i = i_1 = j = j_1 = 0$, on obtient le coefficient N_{00} :

$$N_{00} = |\, \Delta_{00}^{10Q} \quad \Delta_{00}^{01Q} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,| \,,$$

ce déterminant 3×3 est identique à $\omega_{00}\omega_{10}\omega_{01} \,|\, \Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{00}^{01}\,|$, déterminant 2×2. Le contrôle dans $\mathbb{R}^3$ est analogue à celui trouvé dans $\mathbb{R}^2$, à savoir $|\,\Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{00}^{01}\,|$ qui n'est autre que $|\,\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}\,|$. Notons également, comme vu dans l'exemple ci-dessus, que

$$|\, \Delta_{00}^{10Q} \quad \Delta_{00}^{01Q} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,| \;=\; |\, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,| \;=\; |\, \overrightarrow{OQ_{10}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,| \,,$$

qui s'explicite en :

$$\omega_{00}\omega_{10}\omega_{01} \begin{vmatrix} x_{10} & x_{01} & x_{00} \\ y_{10} & y_{01} & y_{00} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \omega_{00}\omega_{10}\omega_{01} \,|\, \Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{00}^{01}\,| \,,$$

comme indiqué ci-dessus.

Pour le jeu $i = i_1 = 1, j = j_1 = 0$, on trouve le coefficient N_{20} :

$$N_{20} = |\, \Delta_{00}^{10Q} \quad \Delta_{10}^{01Q} \quad \overrightarrow{OQ_{10}}\,| \;=\; |\, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{10}}\,| \;=\; -|\, \overrightarrow{OQ_{00}} \quad \overrightarrow{OQ_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{10}}\,|$$

qui est simplement égal à $\omega_{00}\omega_{11}\omega_{10} \,|\Delta_{00}^{10} \quad \Delta_{10}^{01}\,|$.

Pour le jeu $i = i_1 = 0, j = j_1 = 1$, on trouve le coefficient N_{02} :

$$N_{02} = |\, \Delta_{01}^{10Q} \quad \Delta_{00}^{01Q} \quad \overrightarrow{OQ_{01}}\,| \;=\; |\, \overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}}\,| \;=\; -\,|\, \overrightarrow{OQ_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}}\,|$$

qui est, de la même façon, égal à $\omega_{00}\omega_{01}\omega_{11} \,|\Delta_{01}^{10} \quad \Delta_{00}^{01}\,|$.

Pour le jeu $i = i_1 j = j_1 = 1$, on trouve le coefficient N_{22} :

$$N_{22} = |\, \Delta_{01}^{10Q} \quad \Delta_{10}^{01Q} \quad \overrightarrow{OQ_{11}}\,| \;=\; |\, \overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{11}}\,| \;=\; |\, \overrightarrow{OQ_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{10}} \quad \overrightarrow{OQ_{11}}\,|$$

qui est , de la même façon, égal à $\omega_{01}\omega_{10}\omega_{11} \,|\Delta_{01}^{10} \quad \Delta_{10}^{01}\,|$.

Les 4 coefficients des arêtes. Pour les jeux $i_1 = 1, i = 0, j = j_1 = 0$ et $i_1 = 0, i = 1, j = j_1 = 0$, on trouve le coefficient N_{10} qui, ainsi, comprend deux termes.

$$N_{10} = \frac{1}{2}\left\{|\,\Delta_{00}^{10Q}\quad \Delta_{10}^{01Q}\quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,| + |\,\Delta_{00}^{10Q}\quad \Delta_{00}^{01Q}\quad \overrightarrow{OQ_{10}}\,|\right\},$$

$$N_{10} = \frac{1}{2}\left\{|\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}}\quad \overrightarrow{OQ_{10}}\,|\right\},$$

on ouvre tous les vecteurs en O, il vient, successivement :

$$N_{10} = \frac{1}{2}\left\{|\,\overrightarrow{OQ_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{10}O} + \overrightarrow{OQ_{11}}\quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,| - |\,\overrightarrow{OQ_{00}}\quad \overrightarrow{Q_{00}O} + \overrightarrow{OQ_{01}}\quad \overrightarrow{OQ_{10}}\,|\right\},$$

$$N_{10} = \frac{1}{2}\left\{|\,\overrightarrow{OQ_{10}}\quad \overrightarrow{OQ_{11}}\quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,| - |\,\overrightarrow{OQ_{00}}\quad \overrightarrow{OQ_{01}}\quad \overrightarrow{OQ_{10}}\,|\right\},$$

c'est-à-dire :

$$N_{10} = \frac{1}{2}\left\{N_{00} + N_{20}\right\},$$

ce qui veut dire que les coefficients coins contrôlent ce coefficient et donc les coefficients d'arêtes qui, par suite, n'apportent rien.

Le coefficient central. Ce coefficient possède quatre termes :

$$N_{11} = \frac{1}{4}\left\{|\,\Delta_{00}^{10Q}\quad \Delta_{00}^{01Q}\quad \overrightarrow{OQ_{11}}\,| + |\,\Delta_{01}^{10Q}\quad \Delta_{00}^{01Q}\quad \overrightarrow{OQ_{10}}\,| + |\,\Delta_{00}^{10Q}\quad \Delta_{10}^{01Q}\quad \overrightarrow{OQ_{01}}\,| + |\,\Delta_{01}^{10Q}\quad \Delta_{10}^{01Q}\quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,|\right\},$$

soit :

$$N_{11} = \frac{1}{4}\left\{|\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}}\quad \overrightarrow{OQ_{11}}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}}\quad \overrightarrow{OQ_{10}}\,| \right.$$
$$\left. + |\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\quad \overrightarrow{OQ_{01}}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,|\right\},$$

on ouvre $\overrightarrow{OQ_{11}}$ en Q_{00}, $\overrightarrow{OQ_{10}}$ en Q_{01}, $\overrightarrow{OQ_{01}}$ en Q_{10} et $\overrightarrow{OQ_{00}}$ en Q_{11}. Il vient

$$4N_{11} = |\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}}\quad \overrightarrow{OQ_{00}} + \overrightarrow{Q_{00}Q_{11}}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}}\quad \overrightarrow{OQ_{01}} + \overrightarrow{Q_{01}Q_{10}}\,|$$
$$+ |\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\quad \overrightarrow{OQ_{10}} + \overrightarrow{Q_{10}Q_{01}}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\quad \overrightarrow{OQ_{11}} + \overrightarrow{Q_{11}Q_{00}}\,|,$$

$$4N_{11} = N_{00} + |\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{11}}\,| + N_{02} + |\,\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}}\quad \overrightarrow{Q_{01}Q_{10}}\,|$$
$$+ N_{20} + |\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{01}}\,| + N_{22} + |\,\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{11}Q_{00}}\,|.$$

De la sorte, on trouve :

$$4N_{11} = N_{00} + N_{20} + N_{02} + N_{22} + |\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{11}}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}}\quad \overrightarrow{Q_{01}Q_{10}}\,|$$
$$+ |\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{01}}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{11}Q_{00}}\,|,$$

on ouvre alors les deux premiers vecteurs en Q_{10} et Q_{11} pour analyser les quatre derniers termes de cette somme. On a ainsi :

$$|\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} + \overrightarrow{Q_{10}Q_{01}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} + \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{11}} + \overrightarrow{Q_{11}Q_{01}}\quad \overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} + \overrightarrow{Q_{11}Q_{10}}\,|$$
$$+ |\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{01}}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{11}Q_{00}}\,|,$$

il reste seulement :

$$|\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{01}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{11}Q_{10}}\,|$$
$$+ |\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{01}}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}}\quad \overrightarrow{Q_{11}Q_{00}}\,|,$$

et donc, miracle, en manipulant, l'expression initiale s'est réduite à :

$$N_{11} = \frac{1}{4}\left\{N_{00} + N_{20} + N_{02} + N_{22}\right\}.$$

Le contrôle N_{11} est redondant avec les contrôles des coins, résultat déjà vu dans la méthode directe.

Réduction du polynôme. Comme tous les coefficients s'expriment en fonction des coefficients coins, le polynôme trouvé, à savoir :

$$\sum_{I=0}^{2}\sum_{J=0}^{2} B_I^2(u)B_J^2(v)N_{IJ}\,,$$

doit se simplifier. Par exemple, si on regarde les termes relatifs à N_{00}, donc lui-même, N_{10}, N_{01} et N_{11}, il vient :

$$B_0^2(u)B_0^2(v) + \frac{B_1^2(u)B_0^2(v)}{2} + \frac{B_0^2(u)B_1^2(v)}{2} + \frac{B_1^2(u)B_1^2(v)}{4}\,,$$

soit, en explicitant les Bernstein :

$$(1-u)^2(1-v)^2 + u(1-u)(1-v)^2 + (1-u)^2v(1-v) + u(1-u)v(1-v)\,,$$

qui se factorise et se simplifie :

$$(1-u)(1-v)\left\{(1-u)(1-v) + u(1-v) + (1-u)v + uv\right\} \;=\; (1-u)(1-v)\,,$$

par suite, les autres regroupements conduisant à des résultats analogues, le polynôme se réduit à :

$$\sum_{I=0}^{1}\sum_{J=0}^{1} B_I^1(u)B_J^1(v)N_{IJ}\,,$$

en renommant $N_{10} = N_{20}$, $N_{11} = N_{22}$ et $N_{01} = N_{02}$. Ce résultat était prévisible mais totalement caché dans le formalisme. Notons que l'on retrouve exactement le résultat obtenu par la méthode directe ce qui est rassurant.

En conclusion. Le carreau est entièrement contrôlé par ses 4 coefficients coins, comme dans le cas du carreau de Bézier classique, [3], en ne prenant pas en compte les poids qui sont positifs. Un carreau convexe est donc valide et ceci est la condition nécessaire et suffisante de validité. Comme ci-dessus, on peut se demander si il est possible de trouver directement ce degré sans avoir à expliciter tous les coefficients, c'est l'objet de ce qui suit.

3.2.3 Réduction du jacobien

On repart encore de l'expression générale (au facteur D^3 près) :

$$\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1}\sum_{j_1=0,1}\sum_{i_1=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)B_{i_1}^1(u)B_{j_1}^1(v)\,|\,\Delta_{0j_1}^{10Q}\quad \Delta_{i_10}^{01Q}\quad \overrightarrow{OQ_{ij}}\,|\,,$$

que l'on écrit (en séparant le produit vectoriel et le produit scalaire) :

$$\left\{\sum_{i_1=0,1}\sum_{j_1=0,1} B_{i_1}^1(u)B_{j_1}^1(v)(\,\Delta_{0j_1}^{10Q}\wedge\Delta_{i_10}^{01Q}\,)\right\}.\left\{\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\overrightarrow{OQ_{ij}}\right\}\,,$$

soit, également :

$$\sum_{i_1=0,1}\sum_{j_1=0,1} B_{i_1}^1(u)B_{j_1}^1(v)\left\{\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)(\,\Delta_{0j_1}^{10Q}\wedge\Delta_{i_10}^{01Q}\,).\overrightarrow{OQ_{ij}}\right\}\,,$$

et on cherche les termes en $i_1 = j_1 = 0$, soit :

$$\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)(\,\Delta_{00}^{10Q}\wedge\Delta_{00}^{01Q}\,).\overrightarrow{OQ_{ij}}\,,$$

ou encore :

$$\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\,|\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}}\quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}}\quad \overrightarrow{OQ_{ij}}\,|\,,$$

explicité en :

$$
\begin{aligned}
B^1_0(u)B^1_0(v)|\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}|+\\
B^1_0(u)B^1_1(v)|\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}}|+\\
B^1_1(u)B^1_0(v)|\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{10}}|+\\
B^1_1(u)B^1_1(v)|\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{11}}|,
\end{aligned}
$$

mais, en ouvrant le dernier vecteur en Q_{00} pour ces quatre termes sauf le premier, il vient :

$$
|\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}}| = |\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}|,
$$

et, de même :

$$
|\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{10}}| = |\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}|,
$$

tandis que

$$
|\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{11}}| = |\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}| + |\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{11}}| \,.
$$

Par suite, le terme $|\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}|$ se factorise et ne restera à traiter que le dernier terme en $\overrightarrow{Q_{00}Q_{11}}$. La factorisation conduit à :

$$
\left\{B^1_0(u)B^1_0(v) + B^1_0(u)B^1_1(v) + B^1_1(u)B^1_0(v) + B^1_1(u)B^1_1(v)\right\}|\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}|,
$$

qui se réduit à $|\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}|$ car $B^1_0(u)B^1_0(v) + B^1_0(u)B^1_1(v) + B^1_1(u)B^1_0(v) + B^1_1(u)B^1_1(v) = \sum_i \sum_j B^1_i(u)B^1_j(v) = \sum_i B^1_I(u) \sum_j B^1_J(v) = 1$. Le terme en $i_1 = j_1 = 0$ se réduit donc à :

$$
B^1_0(u)B^1_0(v)|\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}| + B^1_0(u)B^1_0(v)B^1_1(u)B^1_1(v)|\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{11}}|\,.
$$

On regarde maintenant un autre terme, $i_1 = 0, j_1 = 1$, le même raisonnement donne à analyser l'expression :

$$
\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B^1_i(u)B^1_j(v)(\,\Delta^{10Q}_{01} \wedge \Delta^{01Q}_{00}\,).\overrightarrow{OQ_{ij}}\,,
$$

soit :

$$
\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B^1_i(u)B^1_j(v)\,|\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{ij}}\,|,
$$

explicité en :

$$
\begin{aligned}
B^1_0(u)B^1_0(v)\,|\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,|+\\
B^1_0(u)B^1_1(v)\,|\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}}\,|+\\
B^1_1(u)B^1_0(v)\,|\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{10}}\,|+\\
B^1_1(u)B^1_1(v)\,|\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{11}}\,|,
\end{aligned}
$$

mais, en ouvrant le dernier vecteur en Q_{01} pour ces quatre termes sauf le second, il vient :

$$
|\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,| = |\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}}\,|,
$$

$$
|\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{10}}\,| = |\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}}\,| + |\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{Q_{01}Q_{10}}\,|,
$$

$$
|\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{11}}\,| = |\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}}\,|,
$$

donc on factorise $|\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}}\,|$ et, comme ci-dessus, le terme en $B^1_0(u)B^1_1(v)$ se réduit à :

$$
B^1_0(u)B^1_1(v)|\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}}\,| + B^1_0(u)B^1_1(v)B^1_0(u)B^1_1(v)|\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{Q_{01}Q_{10}}\,|\,.
$$

On prend maintenant le terme en $i_1 = 1, j_1 = 0$, de façon analogue, on a :

$$\sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) (\, \Delta_{00}^{10Q} \wedge \Delta_{10}^{01Q} \,) . \overrightarrow{OQ_{ij}} \, ,$$

soit :

$$\sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} B_i^1(u) B_j^1(v) \, | \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{ij}} \, | \, ,$$

explicité en :

$$\begin{aligned}
&B_0^1(u)B_0^1(v) \, | \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}} \, | \, , \\
&B_0^1(u)B_1^1(v) \, | \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}} \, | \, , \\
&B_1^1(u)B_0^1(v) \, | \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{10}} \, | \, , \\
&B_1^1(u)B_1^1(v) \, | \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{11}} \, | \, ,
\end{aligned}$$

mais, en ouvrant le dernier vecteur en Q_{10} pour ces quatre termes sauf le troisième, il vient :

$$| \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}} \, | \; = \; | \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{10}} \, | \, ,$$

$$| \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}} \, | \; = \; | \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{10}} \, | \; + \; | \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{01}} \, | \, ,$$

$$| \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{11}} \, | \; = \; | \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{10}} \, | \, ,$$

donc, comme ci-dessus, le terme en $B_1^1(u)B_0^1(v)$ se réduit à :

$$B_1^1(u)B_0^1(v) | \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{10}} \, | + B_1^1(u)B_0^1(v)B_0^1(u)B_1^1(v) | \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{01}} \, | \, .$$

Le dernier terme est traite de manière analogue et on trouve :

$$B_1^1(u)B_1^1(v) | \, \overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{OQ_{11}} \, | + B_1^1(u)B_0^1(v)B_0^1(u)B_1^1(v) | \, \overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{11}Q_{00}} \, | \, .$$

Par suite, le polynôme initial de degré 2×2 se réduit à :

$$\sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} B_i^1(u) B_j^1(v) \, | \, \overrightarrow{Q_{0j}Q_{1j}} \quad \overrightarrow{Q_{i0}Q_{i1}} \quad \overrightarrow{OQ_{ij}} \, | +$$

$$\begin{aligned}
&B_0^1(u)B_0^1(v)B_1^1(u)B_1^1(v) | \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{11}} | + \\
&B_0^1(u)B_1^1(v)B_0^1(u)B_1^1(v) | \, \overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{Q_{01}Q_{10}} \, | + \\
&B_1^1(u)B_0^1(v)B_0^1(u)B_1^1(v) | \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{01}} \, | + \\
&B_1^1(u)B_0^1(v)B_0^1(u)B_1^1(v) | \, \overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{11}Q_{00}} \, | \, ,
\end{aligned}$$

mais, comme le terme $B_0^1(u)B_0^1(v)B_1^1(u)B_1^1(v)$ se factorise, il reste, au dela de la double somme :

$$\begin{aligned}
&| \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{11}} | \; + \; | \, \overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{Q_{01}Q_{10}} \, | + \\
&| \, \overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{01}} \, | \; + \; | \, \overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{11}Q_{00}} \, | \, ,
\end{aligned}$$

qui s'annule. D'ou le résultat final, le polynôme se réduit à :

$$\sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} B_i^1(u) B_j^1(v) \, | \, \overrightarrow{Q_{0j}Q_{1j}} \quad \overrightarrow{Q_{i0}Q_{i1}} \quad \overrightarrow{OQ_{ij}} \, | \, ,$$

ou encore :

$$\sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} B_i^1(u) B_j^1(v) N_{ij} \, ,$$

avec :

$$N_{ij} \; = \; | \, \overrightarrow{Q_{0j}Q_{1j}} \quad \overrightarrow{Q_{i0}Q_{i1}} \quad \overrightarrow{OQ_{ij}} \, | \, .$$

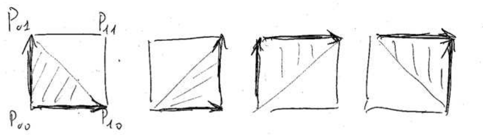

FIG. 4 – *Les coefficients de contrôle du carreau rationnel de degré 1 (aux poids prés qui ne contribuent pas).*

Ces coefficients doivent s'écrire en fonction des P_{ij}. Regardons d'abord N_{00}.

$$N_{00} = |\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,| \;=\; |\,\overrightarrow{OQ_{10}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{00}}\,| \;=\; \begin{vmatrix} \omega_{10}x_{10} & \omega_{01}x_{01} & \omega_{00}x_{00} \\ \omega_{10}y_{10} & \omega_{01}y_{01} & \omega_{00}y_{00} \\ \omega_{10} & \omega_{01} & \omega_{00} \end{vmatrix},$$

$$= \omega_{00}\omega_{10}\omega_{01} \begin{vmatrix} x_{10} & x_{01} & x_{00} \\ y_{10} & y_{01} & y_{00} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \omega_{00}\omega_{10}\omega_{01} \begin{vmatrix} x_{10}-x_{00} & x_{01}-x_{00} & x_{00} \\ y_{10}-y_{00} & y_{01}-y_{00} & y_{00} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \omega_{00}\omega_{10}\omega_{01}\,|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}\,|\,.$$

Pour N_{01}, on a :

$$N_{01} \;=\; |\,\overrightarrow{Q_{01}Q_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}}\,| \;=\; |\,\overrightarrow{OQ_{11}} \quad \overrightarrow{Q_{00}O} \quad \overrightarrow{OQ_{01}}\,|\,,$$

et la même manipulation donne :

$$N_{01} = \omega_{01}\omega_{00}\omega_{11}\,|\,\overrightarrow{P_{01}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}\,|\,.$$

Ainsi, de manière générique, on a :

$$N_{ij} = \frac{\omega_{00}\omega_{10}\omega_{01}\omega_{11}}{\omega_{1-j,1-i}}\,|\,\overrightarrow{P_{0j}P_{1j}} \quad \overrightarrow{P_{i0}P_{i1}}\,|\,. \tag{2}$$

Et pour la validité, les poids ne sont pas pris en compte et on retrouve exactement la condition de validité du carreau de Bézier classique.

3.3 Réduction directe du jacobien

Peut on arriver plus facilement à ce résultat ? On repart de l'expression initiale du polynôme dans la présentation par composante, c'est-à-dire :

$$\mathcal{J}(u,v) \;=\; \frac{1}{D(u,v)^3}\,|\,\frac{\partial Q}{\partial u} \quad \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \overrightarrow{OQ}\,|\,,$$

mais on considère la combinaison :

$$\mathcal{J}^*(u,v) \;=\; |\,\overrightarrow{OQ} - u\frac{\partial Q}{\partial u} \quad \overrightarrow{OQ} - v\frac{\partial Q}{\partial v} \quad \overrightarrow{OQ}\,|\,,$$

en remarquant que $\mathcal{J}^*(u,v) = uv\mathcal{J}(u,v)$ (hors le coefficient $D^3(u,v)$) et donc a le même signe. La première colonne de ce nouveau déterminant est :

$$\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)Q_{ij} \;-\; u\sum_{j=0,1} B_j^1(v)\Delta_{0j}^{10Q}\,,$$

soit :

$$\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)Q_{ij} \;-\; u\sum_{j=0,1} B_j^1(v)(Q_{1j}-Q_{0j})\,,$$

$$\sum_{j=0,1} B_j^1(v)\left\{\sum_{i=0,1} B_i^1(u)Q_{ij} \;-\; u(Q_{1j}-Q_{0j})\right\}\,,$$

$$\sum_{j=0,1} B_j^1(v)\left\{(1-u)Q_{0j}+uQ_{1j}-uQ_{1j}+uQ_{0j})\right\}\,,$$

$$\sum_{j=0,1} B_j^1(v)Q_{0j}\,,$$

qui est étonnement simple. De même, pour la seconde colonne, on a :

$$\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)Q_{ij}\; - \; v\sum_{i=0,1} B_i^1(u)\Delta_{i0}^{01Q}\,,$$

qui se réduit à :

$$\sum_{i=0,1} B_i^1(u)Q_{i0}\,,$$

et notre déterminant se simplifie en :

$$|\sum_{j=0,1} B_j^1(v)Q_{0j} \quad \sum_{i=0,1} B_i^1(u)Q_{i0} \quad \sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)Q_{ij}\,|\,,$$

ou encore :

$$\sum_{i_1=0,1}\sum_{i=0,1}\sum_{j_1=0,1}\sum_{j=0,1} B_{i_1}^1(u)B_i^1(u)B_{j_1}^1(v)B_j^1(v)\,|\,Q_{0j_1} \quad Q_{i_10} \quad Q_{ij}\,|\,,$$

et l'intérêt de cette quantité est de faire uniquement intervenir des Q_{kl} ce qui permettra d'éliminer un grand nombre des combinaisons résultant des quatre sommations (donc parmi 16) et, également, de passer immédiatement à une écriture en fonction des P_{ij}. Ainsi pour

$$(i,j)=(0,0) \text{ ne reste que } i_1=1 \text{ et } j_1=1\,,$$

$$(i,j)=(0,1) \text{ ne reste que } i_1=1 \text{ et } j_1=0\,,$$
$$(i,j)=(1,0) \text{ ne reste que } i_1=0 \text{ et } j_1=1\,,$$
$$(i,j)=(1,1) \text{ ne reste que } i_1=0,1 \text{ et } j_1=0,1\,,$$

soient, *a priori*, 6 termes que l'on écrit ci-dessous :

$$B_1^1(u)B_0^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)\,|\,Q_{01} \quad Q_{10} \quad Q_{00}\,|+$$
$$B_1^1(u)B_0^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)\,|\,Q_{00} \quad Q_{10} \quad Q_{01}\,|+$$
$$B_1^1(u)B_0^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)\,|\,Q_{01} \quad Q_{00} \quad Q_{10}\,|+$$
$$B_1^1(u)B_0^1(u)B_1^1(v)B_1^1(v)\,|\,Q_{01} \quad Q_{00} \quad Q_{11}\,| \;+\; B_1^1(u)B_1^1(u)B_1^1(v)B_1^1(v)\,|\,Q_{01} \quad Q_{10} \quad Q_{11}\,|+$$
$$B_1^1(u)B_1^1(u)B_1^1(v)B_0^1(v)\,|\,Q_{00} \quad Q_{10} \quad Q_{11}\,|\,,$$

et $B_1^1(u)B_1^1(v)=uv$ se factorise, par suite, on retrouve :

$$\mathcal{J}(u,v)=B_0^1(u)B_0^1(v)\,|\,Q_{01} \quad Q_{10} \quad Q_{00}\,|+$$

$$B_0^1(u)B_0^1(v)\,|\,Q_{00} \quad Q_{10} \quad Q_{01}\,|+$$
$$B_0^1(u)B_0^1(v)\,|\,Q_{01} \quad Q_{00} \quad Q_{10}\,|+$$
$$B_0^1(u)B_1^1(v)\,|\,Q_{01} \quad Q_{00} \quad Q_{11}\,|+B_1^1(u)B_1^1(v)\,|\,Q_{01} \quad Q_{10} \quad Q_{11}\,|+B_1^1(u)B_0^1(v)\,|\,Q_{00} \quad Q_{10} \quad Q_{11}\,|\,,$$

qui se réduit à :

$$\mathcal{J}(u,v)=B_0^1(u)B_0^1(v)\,|\,Q_{01} \quad Q_{00} \quad Q_{10}\,|+$$
$$B_0^1(u)B_1^1(v)\,|\,Q_{01} \quad Q_{00} \quad Q_{11}\,|+B_1^1(u)B_1^1(v)\,|\,Q_{01} \quad Q_{10} \quad Q_{11}\,|+B_1^1(u)B_0^1(v)\,|\,Q_{00} \quad Q_{10} \quad Q_{11}\,|\,,$$

que l'on peut exprimer par :

$$\mathcal{J}(u,v)=B_0^1(u)B_0^1(v)\,|\,Q_{10} \quad Q_{01} \quad Q_{00}\,| \;+\; B_0^1(u)B_1^1(v)\,|\,Q_{00} \quad Q_{11} \quad Q_{01}\,|+$$

$$B_1^1(u)B_1^1(v)\,|\,Q_{01} \quad Q_{10} \quad Q_{11}\,| \;+\; B_1^1(u)B_0^1(v)\,|\,Q_{11} \quad Q_{00} \quad Q_{10}\,|\,,$$

et donc, en P_{ij} :

$$\mathcal{J}(u,v) = B_0^1(u)B_0^1(v)\,\omega_{00}\omega_{10}\omega_{01}|\,P_{10}-P_{00} \quad P_{01}-P_{00}\,| + B_0^1(u)B_1^1(v)\omega_{00}\omega_{01}\omega_{11}\,|\,P_{00}-P_{01} \quad P_{11}-P_{01}\,|$$

$$+\,B_1^1(u)B_1^1(v)\omega_{01}\omega_{10}\omega_{11}\,|\,P_{01}-P_{11} \quad P_{10}-P_{11}\,| + B_1^1(u)B_0^1(v)\omega_{00}\omega_{10}\omega_{11}\,|\,P_{11}-P_{10} \quad P_{00}-P_{10}\,|\,,$$

ou encore :

$$\mathcal{J}(u,v) = B_0^1(u)B_0^1(v)\,\omega_{00}\omega_{10}\omega_{01}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}\,| + B_0^1(u)B_1^1(v)\omega_{00}\omega_{01}\omega_{11}\,|\,\overrightarrow{P_{01}P_{00}} \quad \overrightarrow{P_{01}P_{11}}\,|$$

$$+\,B_1^1(u)B_1^1(v)\omega_{01}\omega_{10}\omega_{11}\,|\,\overrightarrow{P_{11}P_{01}} \quad \overrightarrow{P_{11}P_{10}}\,| \,+\, B_1^1(u)B_0^1(v)\omega_{00}\omega_{10}\omega_{11}\,|\,\overrightarrow{P_{10}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{00}}\,|\,,$$

et, au final :

$$\mathcal{J}(u,v) = B_0^1(u)B_0^1(v)\,\omega_{00}\omega_{10}\omega_{01}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}\,| + B_0^1(u)B_1^1(v)\omega_{00}\omega_{01}\omega_{11}\,|\,\overrightarrow{P_{01}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}\,|$$

$$+\,B_1^1(u)B_1^1(v)\omega_{01}\omega_{10}\omega_{11}\,|\,\overrightarrow{P_{01}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}\,| \,+\, B_1^1(u)B_0^1(v)\omega_{00}\omega_{10}\omega_{11}\,|\,\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}\,|\,,$$

et la formule est générique :

$$\mathcal{J}(u,v) = \sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\,N_{ij}\,,$$

avec :

$$N_{ij} = \frac{\omega_{00}\omega_{10}\omega_{01}\omega_{11}}{\omega_{1-j,1-i}}\,|\,\overrightarrow{P_{0j}P_{1j}} \quad \overrightarrow{P_{i0}P_{i1}}\,|\,,$$

donc exactement la Relation (2).

Avec cette approche, on retrouve les résultats déjà obtenus mais en moins de 2 pages de calculs.

3.4 Conclusion sur le carreau de degré 1

Notre première tentative d'analyse par écriture directe nous a conduit au résultat avec un volume important de calcul. La seconde formulation par composante donne le résultat de manière plus élégante mais reste très technique. La troisième tentative, partant de l'écriture par composante, propose une façon très rapide de conclure et semble relativement facile à étendre au degré 2, c'est ce que nous verrons plus tard.

Le jacobien se comporte comme le polynôme :

$$\mathcal{J}(u,v) = \sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)\,N_{ij}\,,$$

avec :

$$N_{ij} = \frac{\omega_{00}\omega_{10}\omega_{01}\omega_{11}}{\omega_{1-j,1-i}}\,|\,\overrightarrow{P_{0j}P_{1j}} \quad \overrightarrow{P_{i0}P_{i1}}\,|\,,$$

donc il suffit de contrôler les quantités :

$$|\,\overrightarrow{P_{0j}P_{1j}} \quad \overrightarrow{P_{i0}P_{i1}}\,|\,.$$

4 Courbe de Bézier rationnelle de degré 2

Pour définir la courbe, on se donne des points de contrôle P_i et des poids ω_i positifs.

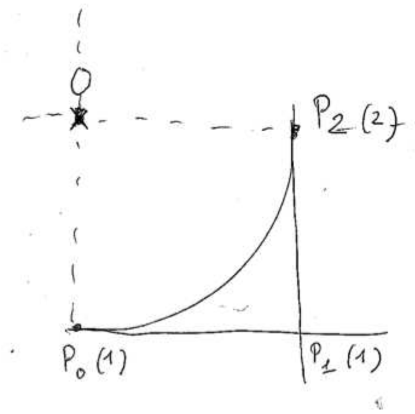

FIG. 5 – *Le cas classique de la construction d'un arc de cercle (centré à l'origine et de rayon 1),* $P_0 = (0, -1), P_1 = (1, -1), P_2 = (1, 0)$ *et* $\omega_0 = \omega_1 = 1, \omega_2 = 2$.

4.1 La courbe

L'expression de la courbe est :

$$\gamma(u) = \frac{\sum_{i=0,2} B_i^2(u)\omega_i P_i}{\sum_{i=0,2} B_i^2(u)\omega_i}, u \in [0, 1], \tag{3}$$

où les $B_i^2(u)$ sont les polynômes de Bernstein. La courbe s'écrit également

$$\gamma(u) = \sum_{i=0,2} R_i^2(u) P_i, ,$$

avec

$$R_i^2(u) = \frac{B_i^2(u)\omega_i}{\sum_{j=0,2} B_j^2(u)\omega_j},$$

les $R_i^2(u)$ étant les fonctions de formes. En introduisant $D(u) = \sum_{i=0,2} B_i^2(u)\omega_i$, il vient :

$$R_i^2(u) = \frac{B_i^2(u)\omega_i}{D(u)}.$$

La courbe passe par P_0 et par P_2 tandis que le nœud milieu qui correspond à $u = \frac{1}{2}$ vaut

$$M = \frac{\omega_0 P_0 + 2\omega_1 P_1 + \omega_2 P_2}{\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2},$$

et que, en sens inverse, le nœud milieu permet de trouver le point de contrôle P_1 :

$$2\omega_1 P_1 = (\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2)M - \omega_0 P_0 - \omega_2 P_2 .$$

Notons (x_i, y_i) les coordonnées du point P_i de $\mathbb{R}^2$ et construisons les points Q_i dans $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées sont $(\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i z_i)$ avec $z_i = 1$ pour tout i. Alors la courbe définie par les points de contrôle Q_i s'écrit :

$$\gamma_Q(u) = \sum_{i=0,2} B_i^2(u) Q_i ,$$

et, ainsi, est une courbe de Bézier classique. Le milieu de cette courbe s'exprime classiquement par :

$$M_Q = \frac{Q_0 + 2Q_1 + Q_2}{4},$$

et permet de retrouver le milieu M de $\gamma(u)$. En effet, ce milieu est la projection homogène de M_Q. Comme

$$M_Q = (\frac{\omega_0 x_0 + 2\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2}{4}, \frac{\omega_0 y_0 + 2\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2}{4}, \frac{\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2}{4}),$$

le point projeté est :

$$(\frac{\omega_0 x_0 + 2\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2}{\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2}, \frac{\omega_0 y_0 + 2\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2}{\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2}),$$

soit encore :

$$\frac{\omega_0 P_0 + 2\omega_1 P_1 + \omega_2 P_2}{\omega_0 + 2\omega_1 + \omega_2},$$

c'est-à-dire M. Ce lien immédiat entre des entités rationnelles définies dans $\mathbb{R}^2$ (resp. dans $\mathbb{R}^3$) et les entités non rationnelles correspondantes définies dans $\mathbb{R}^3$ (resp. dans $\mathbb{R}^4$) sera utilisé plus tard pour analyser les carreaux.

4.2 La tangente

La dérivée de $D(u)$ a la forme classique :

$$D^{'}(u) \,=\, 2 \sum_{j=0,1} B_j^1(u)(\omega_{j+1} - \omega_j)\,.$$

On calcule maintenant la dérivée de $R_i^2(u)$, il vient :

$$R_i^2(u)^{'} \,=\, \frac{B_i^2(u)^{'} D(u) - B_i^2(u) D^{'}(u)}{D^2(u)} \omega_i\,,$$

qui se comporte comme

$$\left\{ B_i^2(u)^{'} D(u) - B_i^2(u) D^{'}(u) \right\} \omega_i\,,$$

puisque le dénominateur est positif. Par suite, la tangente se comporte comme :

$$\sum_{i=0,2} \left\{ B_i^2(u)^{'} D(u) - B_i^2(u) D^{'}(u) \right\} \omega_i P_i\,.$$

Cette expression suggère que la forme est de degré 3, en fait, on va montrer qu'elle n'est que de degré 2 dans le cas général et même de degré 1 quand tous les poids sont égaux. Pour ce faire, on manipule l'expression précédente. En premier, on considère séparément les deux termes de l'expresion et, dans le premier, on explicite la dérivée des $B_i^2(u)$, on a ainsi :

$$2 \sum_{i=0,1} B_i^1(u) D(u)(\omega_{i+1} P_{i+1} - \omega_i P_i) - \sum_{i=0,2} B_i^2(u) D^{'}(u) \omega_i P_i\,,$$

ensuite, on explicite $D(u)$ et $D^{'}(u)$, il vient :

$$2 \sum_{i=0,1} B_i^1(u) \sum_{j=0,2} B_j^2(u) \omega_j (\omega_{i+1} P_{i+1} - \omega_i P_i) - 2 \sum_{i=0,2} B_i^2(u) \sum_{j=0,1} B_j^1(u)(\omega_{j+1} - \omega_j) \omega_i P_i\,,$$

on regroupe les sommes (en oubliant le facteur 2) :

$$\sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} B_i^1(u) B_j^2(u) \omega_j (\omega_{i+1} P_{i+1} - \omega_i P_i) - \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,1} B_i^2(u) B_j^1(u)(\omega_{j+1} - \omega_j) \omega_i P_i\,,$$

on étend les termes en fonction des combinaisons du type $\omega_k \omega_l P_{...l}$, on a donc :

$$\sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} B_i^1(u) B_j^2(u)(\omega_j \omega_{i+1} P_{i+1} - \omega_j \omega_i P_i) - \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,1} B_i^2(u) B_j^1(u)(\omega_{j+1} \omega_i P_i - \omega_j \omega_i P_i)\,,$$

on inverse les indices dans le deuxième terme :

$$\sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} B_i^1(u) B_j^2(u)(\omega_j \omega_{i+1} P_{i+1} - \omega_j \omega_i P_i) - \sum_{j=0,2} \sum_{i=0,1} B_j^2(u) B_i^1(u)(\omega_{i+1} \omega_j P_j - \omega_i \omega_j P_j)\,,$$

on permute les sommes du second terme :

$$\sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} B_i^1(u) B_j^2(u)(\omega_j \omega_{i+1} P_{i+1} - \omega_j \omega_i P_i) - \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} B_i^1(u) B_j^2(u)(\omega_{i+1} \omega_j P_j - \omega_i \omega_j P_j)\,.$$

et on regroupe, il vient au final :

$$\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,2} B_i^1(u)B_j^2(u)\left\{\omega_j\omega_{i+1}P_{i+1} - \omega_j\omega_i P_i - \omega_{i+1}\omega_j P_j + \omega_i\omega_j P_j\right\} .$$

Cette expression est, *a priori*, de degré 3. En réalité, elle est de degré 2. Pour l'établir, on va expliciter les coefficients des $\omega_i P_i$ impliqués. Pour $\omega_0 P_0$, les indices qui interviennent sont :

$$\omega_0 P_0 \quad : \quad \to (i,j) \;=\; (0,0),(0,1),(0,2),(0,0),(1,0),(0,0),(1,0)\,,$$

soit, la somme :

$$B_0^1B_0^2\omega_0 + B_0^1B_1^2\omega_1 + B_0^1B_2^2\omega_2 + B_0^1B_0^2\omega_1 + B_1^1B_0^2\omega_2 - B_0^1B_0^2\omega_0 - B_1^1B_0^2\omega_1$$

$$\text{donc, finalement} - \left\{(1-u)^2\omega_1 + u(1-u)\omega_2\right\}\omega_0 P_0\,.$$

Idem pour $\omega_1 P_1$ et $\omega_2 P_2$, il vient successivement :

$$\omega_1 P_1 \quad : \quad \to (i,j) \;=\; (0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(0,1),(1,1),(0,1),(1,1)\,.$$

$$B_0^1B_0^2\omega_0{+}B_0^1B_1^2\omega_1{+}B_0^1B_2^2\omega_2{-}B_1^1B_0^2\omega_0{-}B_1^1B_1^2\omega_1{-}B_1^1B_2^2\omega_2{-}B_0^1B_1^2\omega_1{-}B_1^1B_1^2\omega_2{+}B_0^1B_1^2\omega_0{+}B_1^1B_1^2\omega_1$$

$$= \;(1-u)^2\omega_0 - u^2\omega_2\,,$$

$$\omega_2 P_2 \quad : \quad \to (i,j) \;=\; (1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(0,2),(1,2),(0,2),(1,2)\,.$$

$$B_1^1B_0^2\omega_0{+}B_1^1B_1^2\omega_1{+}B_1^1B_2^2\omega_2{-}B_2^1B_0^2\omega_0{-}B_2^1B_1^2\omega_1{-}B_2^1B_2^2\omega_2{-}B_0^1B_2^2\omega_1{-}B_1^1B_2^2\omega_2{+}B_0^1B_2^2\omega_0{+}B_1^1B_2^2\omega_1$$

$$= \;u(1-u)\omega_0 + u^2\omega_1\,.$$

En regroupant les 3 termes, il vient :

$$-\left\{(1-u)^2\omega_1 + u(1-u)\omega_2\right\}\omega_0P_0 + \left\{(1-u)^2\omega_0 - u^2\omega_2\right\}\omega_1P_1 + \left\{u(1-u)\omega_0 + u^2\omega_1\right\}\omega_2P_2\,,$$

$$-(1-u)^2\omega_1\omega_0P_0 - u(1-u)\omega_2\omega_0P_0 + (1-u)^2\omega_0\omega_1P_1 - u^2\omega_2\omega_1P_1 + u(1-u)\omega_0\omega_2P_2 + u^2\omega_1\omega_2P_2\,,$$

c'est-à-dire :

$$(1-u)^2\omega_0\omega_1\overrightarrow{P_0P_1} + u(1-u)\omega_0\omega_2\overrightarrow{P_0P_2} + u^2\omega_1\omega_2\overrightarrow{P_1P_2}\,.$$

ou encore, sous une pseudo forme de Bézier :

$$(1-u)^2\omega_0\omega_1\overrightarrow{P_0P_1} + 2u(1-u)\omega_0\omega_2\frac{\overrightarrow{P_0P_2}}{2} + u^2\omega_1\omega_2\overrightarrow{P_1P_2}\,, \tag{4}$$

qui s'écrira, en vue de traiter un carreau :

$$(1-u)^2\omega_{0j}\omega_{1j}\overrightarrow{P_{0j}P_{1j}} + 2u(1-u)\omega_{0j}\omega_{2j}\frac{\overrightarrow{P_{0j}P_{2j}}}{2} + u^2\omega_{1j}\omega_{2j}\overrightarrow{P_{1j}P_{2j}}\,,$$

pour les dérivées en u et

$$(1-v)^2\omega_{i0}\omega_{i1}\overrightarrow{P_{i0}P_{i1}} + 2v(1-v)\omega_{i0}\omega_{i2}\frac{\overrightarrow{P_{i0}P_{i2}}}{2} + v^2\omega_{i1}\omega_{i2}\overrightarrow{P_{i1}P_{i2}}\,,$$

pour les dérivées en v.

Notons que l'expression (4) est de degré 2 et peut, avec des notations appropriées, s'écrire simplement comme

$$\sum_{i=0,2} B_i^2(u)\Delta_i\,.$$

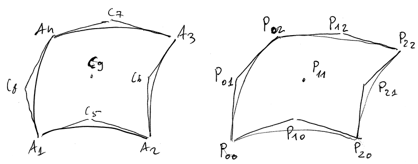

FIG. 6 – *Le carreau, ses points de contrôle et ses sommets.*

Remarque : Quand tous les ω_i, sont égaux, le comportement est celui de :

$$(1-u)^2\overrightarrow{P_0P_1} + u(1-u)\overrightarrow{P_0P_2} + u^2\overrightarrow{P_1P_2}\,,$$

soit, en ouvrant $\overrightarrow{P_0P_2}$ en P_1 :

$$(1-u)\overrightarrow{P_0P_1} + u\overrightarrow{P_1P_2}\,,$$

c'est-à-dire le cas d'une courbe classique de Bézier.

La tangente en P_0 est parallèle à $\overrightarrow{P_0P_1}$ avec le sens voulu lié au signe des deux poids impliqués. De même, la tangente en P_2 est parallèle à $\overrightarrow{P_1P_2}$. La tangente au nœud milieu est parallèle à

$$\omega_0\omega_1\overrightarrow{P_0P_1} + \omega_0\omega_2\overrightarrow{P_0P_2} + \omega_1\omega_2\overrightarrow{P_1P_2}\,,$$

et, quand les poids sont égaux, on retrouve que la tangente est parallèle à $\overrightarrow{P_0P_2}$.

5 Carreau de Bézier rationnel de degré 2

Nous allons suivre le même plan que pour l'analyse du carreau de degré 1 en regardant ce que l'on peut déduire des trois méthodes utilisées ci-dessus en regardant leur limite.

Le carreau se formule comme :

$$\sigma(u,v) = \frac{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)\omega_{ij}P_{ij}}{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)\omega_{ij}}\,, (u,v) \in [0,1]\times[0,1]\,.$$

Remarque : Quand tous les ω_{ij}, sont égaux, le carreau est un carreau de Bézier classique.

Pour discuter du signe du jacobien de cette transformation, on va exprimer ses dérivées. On note $D(u,v) = \sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)\omega_{ij}$.

5.1 Méthode globale directe

La dérivée en u s'écrit :

$$\frac{\partial\sigma(u,v)}{\partial u} = \frac{D(u,v)\frac{\partial}{\partial u}\left(\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)\omega_{ij}P_{ij}\right) - \frac{\partial D(u,v)}{\partial u}(\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)\omega_{ij}P_{ij})}{D(u,v)^2}\,,$$

soit (au facteur 2 près)

$$\frac{D(u,v)\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,2} B_i^1(u)B_j^2(v)\Delta_{ij}^{10} - (\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,2} B_i^1(u)B_j^2(v)\delta_{ij}^{10})(\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)\omega_{ij}P_{ij})}{D(u,v)^2}\,,$$

avec

$$\Delta_{ij}^{10} = \omega_{i+1,j}P_{i+1,j} - \omega_{ij}P_{ij}$$

et

$$\delta_{ij}^{10} = \omega_{i+1,j} - \omega_{ij}\,.$$

Le comportement, comme le dénominateur est positif, est celui de

$$D(u,v)\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,2}B_i^1(u)B_j^2(v)\Delta_{ij}^{10}-(\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,2}B_i^1(u)B_j^2(v)\delta_{ij}^{10})(\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}B_i^2(u)B_j^2(v)\omega_{ij}P_{ij})\,.$$

Explicitant $D(u,v)$, il vient :

$$(\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}B_i^2(u)B_j^2(v)\omega_{ij})(\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,2}B_i^1(u)B_j^2(v)\Delta_{ij}^{10})$$

$$-(\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,2}B_i^1(u)B_j^2(v)\delta_{ij}^{10})(\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}B_i^2(u)B_j^2(v)\omega_{ij}P_{ij})\,,$$

ou encore :

$$(\sum_{i_1=0,2}\sum_{j_1=0,2}B_{i_1}^2(u)B_{j_1}^2(v)\omega_{i_1j_1})(\sum_{i_2=0,1}\sum_{j_2=0,2}B_{i_2}^1(u)B_{j_2}^2(v)\Delta_{i_2j_2}^{10})$$

$$-(\sum_{i_2=0,1}\sum_{j_1=0,2}B_{i_2}^1(u)B_{j_1}^2(v)\delta_{i_2j_1}^{10})(\sum_{i_1=0,2}\sum_{j_2=0,2}B_{i_1}^2(u)B_{j_2}^2(v)\omega_{i_1j_2}P_{i_1j_2})\,,$$

qui s'écrit également :

$$\sum_{i_1=0,2}\sum_{i_2=0,1}\sum_{j_1=0,2}\sum_{j_2=0,2}B_{i_1}^2(u)B_{j_1}^2(v)B_{i_2}^1(u)B_{j_2}^2(v)\omega_{i_1j_1}\Delta_{i_2j_2}^{10}$$

$$-\sum_{i_2=0,1}\sum_{i_1=0,2}\sum_{j_1=0,2}\sum_{j_2=0,2}B_{i_2}^1(u)B_{j_1}^2(v)B_{i_1}^2(u)B_{j_2}^2(v)\delta_{i_2j_1}^{10}\omega_{i_1j_2}P_{i_1j_2}\,,$$

donc :

$$\sum_{i_1=0,2}\sum_{i_2=0,1}\sum_{j_1=0,2}\sum_{j_2=0,2}B_{i_1}^2(u)B_{j_1}^2(v)B_{i_2}^1(u)B_{j_2}^2(v)(\omega_{i_1j_1}\Delta_{i_2j_2}^{10}\;-\;\delta_{i_2j_1}^{10}\omega_{i_1j_2}P_{i_1j_2})\,,$$

On explicite les différences en ne regardant que le terme de la somme, ainsi :

$$\omega_{i_1j_1}\Delta_{i_2j_2}^{10}\;-\;\delta_{i_2j_1}^{10}\omega_{i_1j_2}P_{i_1j_2}$$

devient :

$$\omega_{i_1j_1}(\omega_{i_2+1,j_2}P_{i_2+1,j_2}-\omega_{i_2j_2}P_{i_2,j_2})\;-\;(\omega_{i_2+1,j_1}-\omega_{i_2j_1})\omega_{i_1j_2}P_{i_1j_2}\,,$$

ou encore :

$$\omega_{i_1j_1}\omega_{i_2+1,j_2}P_{i_2+1,j_2}-\omega_{i_1j_1}\omega_{i_2j_2}P_{i_2,j_2}\;-\;\omega_{i_2+1,j_1}\omega_{i_1j_2}P_{i_1j_2}+\omega_{i_2j_1}\omega_{i_1j_2}P_{i_1j_2}\,.$$

Comme pour le degré 1, on va exhiber les coefficients des différents $\omega_{ij}P_{ij}$ qui sont au nombre de 9.

On fixe $j_2=j$ et on regarde les trois termes en $\omega_{ij}P_{ij}$ pour $i=0,2$. Seuls les termes en u nous préoccupent, on factorise en effet les deux sommes $\sum_{j_1=0,2}\sum_{j_2=0,2}B_{j_1}^2(v)B_{j_2}^2(v)$, il suffit de regarder l'expression :

$$\sum_{i_1=0,2}\sum_{i_2=0,1}B_{i_1}^2(u)B_{i_2}^1(u)(\omega_{i_1j_1}\omega_{i_2+1,j_2}P_{i_2+1,j_2}-\omega_{i_1j_1}\omega_{i_2j_2}P_{i_2,j_2}-\omega_{i_2+1,j_1}\omega_{i_1j_2}P_{i_1j_2}+\omega_{i_2j_1}\omega_{i_1j_2}P_{i_1j_2})\,.$$

En $\omega_{0j_2}P_{0j_2}$ on a comme contributions celles de $i_1=0,2$ et $i_2=0$ pour le second terme, celles de $i_1=0$ et $i_2=0,1$ pour le troisième terme et celles de $i_1=0$ et $i_2=0,1$ pour le quatrième terme. Soit

$$-\omega_{0j_1}B_0^2(u)B_0^1(u)-\omega_{1j_1}B_1^2(u)B_0^1(u)-\omega_{2j_1}B_2^2(u)B_0^1(u)$$

$$-\omega_{1j_1}B_0^2(u)B_0^1(u)-\omega_{2j_1}B_0^2(u)B_1^1(u)$$

$$+\omega_{0j_1} B_0^2(u) B_0^1(u) + \omega_{1j_1} B_0^2(u) B_1^1(u)\,,$$

qui se réduit à :

$$-\omega_{1j_1} B_1^2(u) B_0^1(u) - \omega_{2j_1} B_2^2(u) B_0^1(u)$$
$$-\omega_{1j_1} B_0^2(u) B_0^1(u) - \omega_{2j_1} B_0^2(u) B_1^1(u) + \omega_{1j_1} B_0^2(u) B_1^1(u)\,,$$

soit encore, en regroupant :

$$\omega_{1j_1}(-B_1^2(u) B_0^1(u) - B_0^2(u) B_0^1(u) + B_0^2(u) B_1^1(u))$$
$$+\omega_{2j_1}(-B_2^2(u) B_0^1(u) - B_0^2(u) B_1^1(u))\,,$$

qui se réduit finalement à :

$$-\omega_{1j_1}(1-u)^2 - \omega_{2j_1} u(1-u)\,,$$

on a gagné un ordre. Les termes en $\omega_{0j_2} P_{0j_2}$ sont ainsi les suivants :

$$\sum_{j_1=0,2} \sum_{j_2=0,2} (-\omega_{1j_1}(1-u)^2 - \omega_{2j_1} u(1-u)) B_{j_1}^2(v) B_{j_2}^2(v) \omega_{0j_2} P_{0j_2}\,.$$

On calcule maintenant les termes en $\omega_{1j_2} P_{1j_2}$. On a comme contributions celles de $i_1 = 0, 2$ et $i_2 = 0$ pour le premier terme, celles de $i_1 = 0, 2$ et $i_2 = 1$ pour le second terme, celles de $i_1 = 1$ et $i_2 = 0, 1$ pour le troisième terme et celles de $i_1 = 1$ et $i_2 = 0, 1$ pour le quatrième terme. Soit

$$\omega_{0j_1} B_0^2(u) B_0^1(u) + \omega_{1j_1} B_1^2(u) B_0^1(u) + \omega_{2j_1} B_2^2(u) B_0^1(u)$$
$$-\omega_{0j_1} B_0^2(u) B_1^1(u) - \omega_{1j_1} B_1^2(u) B_1^1(u) - \omega_{2j_1} B_2^2(u) B_1^1(u)$$
$$-\omega_{1j_1} B_1^2(u) B_0^1(u) - \omega_{2j_1} B_1^2(u) B_1^1(u)$$
$$+\omega_{0j_1} B_1^2(u) B_0^1(u) + \omega_{1j_1} B_1^2(u) B_1^1(u)\,,$$

quatre termes s'annulent, il reste :

$$\omega_{0j_1} B_0^2(u) B_0^1(u) + \omega_{2j_1} B_2^2(u) B_0^1(u)$$
$$-\omega_{0j_1} B_0^2(u) B_1^1(u) - \omega_{2j_1} B_2^2(u) B_1^1(u)$$
$$-\omega_{2j_1} B_1^2(u) B_1^1(u) + \omega_{0j_1} B_1^2(u) B_0^1(u)\,,$$

ces termes se regroupent et se réduisent à :

$$\omega_{0j_1}(1-u)^2 - \omega_{2j_1} u^2\,,$$

comme ci-dessus, on a gagné un ordre. Les termes en $\omega_{1j_2} P_{1j_2}$ sont ainsi les suivants :

$$\sum_{j_1=0,2} \sum_{j_2=0,2} (\omega_{0j_1}(1-u)^2 - \omega_{2j_1} u^2) B_{j_1}^2(v) B_{j_2}^2(v) \omega_{1j_2} P_{1j_2}\,.$$

Pour finir, on calcule ici les termes en $\omega_{2j_2} P_{2j_2}$. On a comme contributions celles de $i_1 = 0, 2$ et $i_2 = 1$ pour le premier terme, celles de $i_1 = 2$ et $i_2 = 0, 1$ pour le troisième terme et celles de $i_1 = 2$ et $i_2 = 0, 1$ pour le quatrième terme. Soit

$$\omega_{0j_1} B_0^2(u) B_1^1(u) + \omega_{1j_1} B_1^2(u) B_1^1(u) + \omega_{2j_1} B_2^2(u) B_1^1(u)$$
$$-\omega_{1j_1} B_2^2(u) B_0^1(u) - \omega_{2j_1} B_2^2(u) B_1^1(u)$$
$$+\omega_{0j_1} B_2^2(u) B_0^1(u) + \omega_{1j_1} B_2^2(u) B_1^1(u)\,,$$

qui se réduit à :

$$\omega_{0j_1} B_0^2(u) B_1^1(u) + \omega_{1j_1} B_1^2(u) B_1^1(u)$$
$$-\omega_{1j_1} B_2^2(u) B_0^1(u) + \omega_{0j_1} B_2^2(u) B_0^1(u) + \omega_{1j_1} B_2^2(u) B_1^1(u)\,,$$

ces termes se regroupent et on trouve :

$$\omega_{0j_1}u(1-u)+\omega_{1j_1}u^2\,,$$

et, au final, les termes en $\omega_{2j_2}P_{2j_2}$ sont les suivants :

$$\sum_{j_1=0,2}\sum_{j_2=0,2}(\omega_{0j_1}u(1-u)+\omega_{1j_1}u^2)B^2_{j_1}(v)B^2_{j_2}(v)\omega_{2j_2}P_{2j_2}\,.$$

On somme les trois termes calculés ci-dessus. Il vient :

$$\sum_{j_1=0,2}\sum_{j_2=0,2}B^2_{j_1}(v)B^2_{j_2}(v)\left\{(-\omega_{1j_1}(1-u)^2-\omega_{2j_1}u(1-u))\omega_{0j_2}P_{0j_2}\right.$$

$$\left.+(\omega_{0j_1}(1-u)^2-\omega_{2j_1}u^2)\omega_{1j_2}P_{1j_2}+(\omega_{0j_1}u(1-u)+\omega_{1j_1}u^2)\omega_{2j_2}P_{2j_2}\right\}\,,$$

et on doit analyser le terme en u que l'on écrit sous la forme :

$$(1-u)^2(-\omega_{1j_1}\omega_{0j_2}P_{0j_2}+\omega_{0j_1}\omega_{1j_2}P_{1j_2})+u(1-u)(-\omega_{2j_1}\omega_{0j_2}P_{0j_2}+\omega_{0j_1}\omega_{2j_2}P_{2j_2})+u^2(-\omega_{2j_1}\omega_{1j_2}P_{1j_2}+\omega_{1j_1}\omega_{2j_2}P_{2j_2})\,.$$

À ce stade, le vecteur est un polynôme de vecteurs de degré 2×4, l'autre dérivée sera de degré 4×2 et le polynôme de contrôle résultant sera, *a priori*, de degré 6×6, soit avec 49 coefficients.

On comprendra facilement que poursuivre l'analyse de cette méthode est sinon impossible du moins fastidieux, par suite, nous allons regarder la deuxième méthode d'analyse.

5.2 Méthode formelle par composantes

On reprend ce qui a été fait pour le degré 1 et on considère le point $P=\sigma(u,v)$ et on note (x,y) ses coordonnées. Si (x_{ij},y_{ij}) désigne les coordonnées du point de contrôle P_{ij}, on a :

$$x=\frac{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}B^2_i(u)B^2_j(v)\omega_{ij}x_{ij}}{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}B^2_i(u)B^2_j(v)\omega_{ij}}\,,$$

$$y=\frac{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}B^2_i(u)B^2_j(v)\omega_{ij}y_{ij}}{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}B^2_i(u)B^2_j(v)\omega_{ij}}\,.$$

Le jacobien s'exprime comme le déterminant :

$$\mathcal{J}(u,v)\;=\;\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\,.$$

Si on note $D(u,v)=\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}B^2_i(u)B^2_j(v)\omega_{ij}$, on a :

$$\mathcal{J}(u,v)\;=\;\frac{1}{D(u,v)^4}\begin{vmatrix}D(u,v)\frac{\partial X}{\partial u}-X\frac{\partial D(u,v)}{\partial u} & D(u,v)\frac{\partial X}{\partial v}-X\frac{\partial D(u,v)}{\partial v}\\ D(u,v)\frac{\partial Y}{\partial u}-Y\frac{\partial D(u,v)}{\partial u} & D(u,v)\frac{\partial Y}{\partial v}-Y\frac{\partial D(u,v)}{\partial v}\end{vmatrix}\,,$$

avec, maintenant, $X=\displaystyle\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}B^2_i(u)B^2_j(v)\omega_{ij}x_{ij}$ et $Y=\displaystyle\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}B^2_i(u)B^2_j(v)\omega_{ij}y_{ij}$, les numérateurs de ces quantités telles que définies initialement.

En développant ce déterminant, les termes en $XY\frac{\partial D(u,v)}{\partial u}\frac{\partial D(u,v)}{\partial v}$ s'annulent, $D(u,v)$ se factorise et on obtient :

$$\frac{1}{D(u,v)^3}\left\{D(u,v)(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}-\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u})+X(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial D(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial D(u,v)}{\partial u})+Y(\frac{\partial D(u,v)}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}-\frac{\partial D(u,v)}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u})\right\}\,,$$

qui s'écrit aussi comme le déterminant :

$$\frac{1}{D(u,v)^3}\begin{vmatrix}\frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & X\\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & Y\\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & Z\end{vmatrix}\,,$$

avec $Z = D(u,v)$. Passant dans $\mathbb{R}^3$, on définit les points Q_{ij} par $Q_{ij} = (P_{ij}, \omega_{ij})$, c'est-à-dire de coordonnées $(\omega_{ij}x_{ij}, \omega_{ij}y_{ij}, \omega_{ij}z_{ij})$ avec $z_{ij} = 1$ puis le point Q de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (X,Y,Z) données par :

$$X = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) \omega_{ij} x_{ij} \,,$$

$$Y = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) \omega_{ij} y_{ij} \,,$$

$$Z = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) \omega_{ij} z_{ij} \,,$$

alors ce point de $\mathbb{R}^3$ est défini par un Bézier classique :

$$Q(u,v) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) Q_{ij} \,,$$

et on a (si O désigne l'origine) :

$$\mathcal{J}(u,v) \; = \; \frac{1}{D(u,v)^3} \left| \, \frac{\partial Q}{\partial u} \quad \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \overrightarrow{OQ} \, \right| ,$$

c'est-à-dire que le jacobien a une interprétation dans l'espace de dimension supérieure. Son signe est celui de :

$$\left| \, \frac{\partial Q}{\partial u} \quad \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \overrightarrow{OQ} \, \right| ,$$

et le polynôme correspondant est obtenu en exprimant ces quantités. On trouve comme polynôme l'expression (et c'est ici seulement que se différencie le calcul par rapport au degré 1) :

$$4 \left| \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} B_i^1(u) B_j^2(v) \Delta_{ij}^{10Q} \quad \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,1} B_i^2(u) B_j^1(v) \Delta_{ij}^{01Q} \quad \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) Q_{ij} \right| ,$$

qui se regroupent en :

$$4 \sum_{i_1=0,1} \sum_{j_1=0,2} \sum_{i_2=0,2} \sum_{j_2=0,1} \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} B_{i_1}^1(u) B_{j_1}^2(v) B_{i_2}^2(u) B_{j_2}^1(v) B_i^2(u) B_j^2(v) \left| \Delta_{i_1 j_1}^{10Q} \quad \Delta_{i_2 j_2}^{01Q} \quad Q_{ij} \right| ,$$

qui s'exprime comme :

$$\sum_{I=0,5} \sum_{J=0,5} B_I^5(u) B_J^5(v) N_{IJ} \,,$$

avec $I = i + i_1 + i_2$ et $J = j + j_1 + j_2$. Les coefficients de contrôle, *a priori* au nombre de 36, valent

$$N_{IJ} = 4 \sum_{i_1+i_2+i=I} \sum_{j_1+j_2+j=J} \frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{C_{i_1+i_2+i}^5 C_{j_1+j_2+j}^5} \left| \Delta_{i_1 j_1}^{10Q} \quad \Delta_{i_2 j_2}^{01Q} \quad Q_{ij} \right| , \qquad (5)$$

et ces coefficients peuvent être exprimés en fonction des poids et des P_{ij} initiaux.

Quelques coefficients (au facteur 4 près). Pour se faire une idée de l'aspect et de l'interprétation des coefficients, on va en expliciter quelques uns. Pour trouver N_{00}, on fait $i_1 = i_2 = i = 0$ et $j_1 = j_2 = j = 0$. Soit :

$$N_{00} = \left| \Delta_{00}^{10Q} \quad \Delta_{00}^{01Q} \quad Q_{00} \right| = \left| Q_{10} - Q_{00} \quad Q_{01} - Q_{00} \quad Q_{00} \right| = \left| Q_{10} \quad Q_{01} \quad Q_{00} \right| ,$$

donc :

$$N_{00} = \omega_{00}\omega_{10}\omega_{01} \begin{vmatrix} x_{10} & x_{01} & x_{00} \\ y_{10} & y_{01} & y_{00} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \omega_{00}\omega_{10}\omega_{01} \begin{vmatrix} x_{10} - x_{00} & x_{01} - x_{00} & x_{00} \\ y_{10} - y_{00} & y_{01} - y_{00} & y_{00} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \omega_{00}\omega_{10}\omega_{01} \begin{vmatrix} x_{10} - x_{00} & x_{01} - x_{00} \\ y_{10} - y_{00} & y_{01} - y_{00} \end{vmatrix} = \omega_{00}\omega_{10}\omega_{01} \left| \overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}} \right| ,$$

comme attendu. Ce coefficient contrôle les tangentes en P_{00}.

N_{50} a la même forme, $N_{50} = \omega_{10}\omega_{20}\omega_{21}|\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}|$, et contrôle les tangentes en P_{20}.

Pour obtenir N_{10}, on fait $i + i_1 + i_2 = 1$ et $j = j_1 = j_2 = 0$, soit trois termes :

$$N_{10} = \frac{1}{5}|\,\Delta_{10}^{10Q} \quad \Delta_{00}^{01Q} \quad Q_{00}\,| + \frac{2}{5}|\,\Delta_{00}^{10Q} \quad \Delta_{10}^{01Q} \quad Q_{00}\,| + \frac{2}{5}|\,\Delta_{00}^{10Q} \quad \Delta_{00}^{01Q} \quad Q_{10}\,|,$$

dont l'interprétation semble peu évidente. On a :

$$N_{10} = \frac{1}{5}|\,\overrightarrow{Q_{10}Q_{20}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad Q_{00}\,| + \frac{2}{5}|\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad Q_{00}\,| + \frac{2}{5}|\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad Q_{10}\,|,$$

et, tout calcul fait (en ouvrant en O et en regroupant on arrive à se débarrasser de $\overrightarrow{Q_{10}Q_{20}}$), il vient une expression nettement plus agréable :

$$N_{10} = \frac{\omega_{00}\omega_{01}\omega_{20}}{5}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}\,| + \frac{2\omega_{00}\omega_{10}\omega_{11}}{5}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}\,| + \frac{\omega_{00}\omega_{01}\omega_{10}}{5}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}\,|,$$

et, par conséquent, les poids interviennent dans ce coefficient (contrairement aux coefficients coins). Le coefficient N_{40} a la même forme, on trouve :

$$N_{40} = \frac{\omega_{00}\omega_{21}\omega_{20}}{5}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}\,| + \frac{2\omega_{20}\omega_{10}\omega_{11}}{5}|\,\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}\,| + \frac{\omega_{20}\omega_{21}\omega_{10}}{5}|\,\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}\,|.$$

Reste à expliciter les coefficients N_{20} et N_{30} qui ont le même aspect. Pour N_{20}, on a $i+i_1+i_2 = 2$ et $j = j_1 = j_2 = 0$, soit 5 termes.

$$\begin{aligned} 10N_{20} = 4|\,\Delta_{00}^{10Q} \quad \Delta_{10}^{01Q} \quad Q_{10}\,| + 2|\,\Delta_{10}^{10Q} \quad \Delta_{10}^{01Q} \quad Q_{00}\,| + 2|\,\Delta_{10}^{10Q} \quad \Delta_{00}^{01Q} \quad Q_{10}\,| + \\ |\,\Delta_{00}^{10Q} \quad \Delta_{20}^{01Q} \quad Q_{00}\,| + |\,\Delta_{00}^{10Q} \quad \Delta_{00}^{01Q} \quad Q_{20}\,|, \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} 10N_{20} = 4|\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad Q_{10}\,| + 2|\,\overrightarrow{Q_{10}Q_{20}} \quad \overrightarrow{Q_{10}Q_{11}} \quad Q_{00}\,| + 2|\,\overrightarrow{Q_{10}Q_{20}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad Q_{10}\,| + \\ |\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{20}Q_{21}} \quad Q_{00}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{00}Q_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}Q_{01}} \quad Q_{20}\,|, \end{aligned}$$

qui semble bien mysterieux. On ouvre tous les vecteurs en O, il reste :

$$\begin{aligned} 10N_{20} = 4|\,\overrightarrow{Q_{00}O} \quad \overrightarrow{OQ_{11}} \quad Q_{10}\,| + 2|\,\overrightarrow{Q_{10}O} + \overrightarrow{OQ_{20}} \quad \overrightarrow{Q_{10}O} + \overrightarrow{OQ_{11}} \quad Q_{00}\,| + 2|\,\overrightarrow{OQ_{20}} \quad \overrightarrow{Q_{00}O} + \overrightarrow{OQ_{01}} \quad Q_{10}\,| + \\ |\,\overrightarrow{OQ_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{20}O} + \overrightarrow{OQ_{21}} \quad Q_{00}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{00}O} + \overrightarrow{OQ_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}O} + \overrightarrow{OQ_{01}} \quad Q_{20}\,|, \\ 10N_{20} = -4|\,\overrightarrow{OQ_{00}} \quad \overrightarrow{OQ_{11}} \quad Q_{10}\,| + 2|\,\overrightarrow{Q_{10}O} \quad \overrightarrow{OQ_{11}} \quad Q_{00}\,| + 2|\,\overrightarrow{OQ_{20}} \quad \overrightarrow{Q_{10}O} \quad Q_{00}\,| + \\ 2|\,\overrightarrow{OQ_{20}} \quad \overrightarrow{OQ_{11}} \quad Q_{00}\,| + 2|\,\overrightarrow{OQ_{20}} \quad \overrightarrow{Q_{00}O} \quad Q_{10}\,| + 2|\,\overrightarrow{OQ_{20}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}} \quad Q_{10}\,| + \\ |\,\overrightarrow{OQ_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{20}O} \quad Q_{00}\,| + |\,\overrightarrow{OQ_{10}} \quad \overrightarrow{OQ_{21}} \quad Q_{00}\,| + |\,\overrightarrow{Q_{00}O} \quad \overrightarrow{OQ_{01}} \quad Q_{20}\,| + \\ |\,\overrightarrow{OQ_{10}} \quad \overrightarrow{Q_{00}O} \quad Q_{20}\,| + |\,\overrightarrow{OQ_{10}} \quad \overrightarrow{OQ_{01}} \quad Q_{20}\,|, \end{aligned}$$

réécrit plus simplement :

$$\begin{aligned} 10N_{20} = -4|\,Q_{00} \quad Q_{11} \quad Q_{10}\,| - 2|\,Q_{10} \quad Q_{11} \quad Q_{00}\,| - 2|\,Q_{20} \quad Q_{10} \quad Q_{00}\,| + \\ 2|\,Q_{20} \quad Q_{11} \quad Q_{00}\,| - 2|\,Q_{20} \quad Q_{00} \quad Q_{10}\,| + 2|\,Q_{20} \quad Q_{01} \quad Q_{10}\,| - \\ |\,Q_{10} \quad Q_{20} \quad Q_{00}\,| + |\,Q_{10} \quad Q_{21} \quad Q_{00}\,| - |\,Q_{00} \quad Q_{01} \quad Q_{20}\,| - \\ |\,Q_{10} \quad Q_{00} \quad Q_{20}\,| + |\,Q_{10} \quad Q_{01} \quad Q_{20}\,|, \end{aligned}$$

réordonné en :

$$\begin{aligned} 10N_{20} = -4|\,Q_{11} \quad Q_{10} \quad Q_{00}\,| - 2|\,Q_{10} \quad Q_{11} \quad Q_{00}\,| - 2|\,Q_{20} \quad Q_{10} \quad Q_{00}\,| + \\ 2|\,Q_{20} \quad Q_{11} \quad Q_{00}\,| - 2|\,Q_{10} \quad Q_{20} \quad Q_{00}\,| + 2|\,Q_{20} \quad Q_{01} \quad Q_{10}\,| - \end{aligned}$$

$$|\,Q_{10} \quad Q_{20} \quad Q_{00}\,| + |\,Q_{10} \quad Q_{21} \quad Q_{00}\,| - |\,Q_{01} \quad Q_{20} \quad Q_{00}\,| -$$
$$|\,Q_{10} \quad Q_{00} \quad Q_{20}\,| + |\,Q_{10} \quad Q_{01} \quad Q_{20}\,|\,,$$

et les regroupements conduisent à :

$$10N_{20} = 2|\,Q_{10} \quad Q_{11} \quad Q_{00}\,| + 2|\,Q_{20} \quad Q_{11} \quad Q_{00}\,| + |\,Q_{20} \quad Q_{01} \quad Q_{10}\,| +$$
$$|\,Q_{10} \quad Q_{21} \quad Q_{00}\,| + |\,Q_{20} \quad Q_{01} \quad Q_{00}\,|\,,$$

qui, exprimé en P_{ij} donne :

$$10N_{20} = 2\omega_{00}\omega_{10}\omega_{11}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}\,| + 2\omega_{00}\omega_{11}\omega_{20}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}\,| +$$
$$\omega_{01}\omega_{10}\omega_{20}|\,\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{01}}\,| + \omega_{00}\omega_{10}\omega_{21}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{21}}\,| + \omega_{00}\omega_{01}\omega_{20}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}\,|\,,$$

ce qui s'écrit aussi de manière plus naturelle (voir le dessin) :

$$10N_{20} = 2\omega_{00}\omega_{10}\omega_{11}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}\,| + 2\omega_{00}\omega_{11}\omega_{20}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}\,| +$$
$$\omega_{01}\omega_{10}\omega_{20}|\,\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{01}}\,| + \omega_{00}\omega_{10}\omega_{21}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{21}}\,| + \omega_{00}\omega_{01}\omega_{20}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}\,|\,.$$

Le coefficient N_{30} s'en déduit, sa forme initiale correspond à $i + i_1 + i_2 = 3$ et $j = j_1 = j_2 = 0$, soit :

$$10N_{30} = 4|\,\Delta_{10}^{10Q} \quad \Delta_{10}^{01Q} \quad Q_{10}\,| + 2|\,\Delta_{00}^{10Q} \quad \Delta_{10}^{01Q} \quad Q_{20}\,| + 2|\,\Delta_{00}^{10Q} \quad \Delta_{20}^{01Q} \quad Q_{10}\,| +$$
$$|\,\Delta_{10}^{10Q} \quad \Delta_{20}^{01Q} \quad Q_{00}\,| + |\,\Delta_{10}^{10Q} \quad \Delta_{00}^{01Q} \quad Q_{20}\,|\,,$$

et, tout calcul fait, on obtient :

$$10N_{30} = 2\omega_{20}\omega_{10}\omega_{11}|\,\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}\,| + 2\omega_{00}\omega_{11}\omega_{20}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}\,| +$$
$$\omega_{00}\omega_{10}\omega_{21}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{21}}\,| + \omega_{01}\omega_{10}\omega_{20}|\,\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{01}}\,| + \omega_{00}\omega_{20}\omega_{21}|\,\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}\,|\,.$$

L'examen précis de la Figure (7) montre de nombreuses redondances. Notre polynôme qui s'écrit ($v = 0$) :

$$\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0} B_i^5(u) N_{ij}\,,$$

doit pouvoir s'écrire comme :

$$\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0} B_i^4(u) M_{ij}\,.$$

On part donc de l'expression initiale écrite comme :

$$\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0} B_i^5(u) \sum_k T_{ij}^k\,,$$

qui indique que les coefficients N_{ij} sont composés d'un ou de plusieurs termes. on a successivement, tenant compte des redondances :

$$N_{00} = T_{00}^1\,,$$
$$N_{10} = \frac{1}{5}T_{10}^1 + \frac{2}{5}T_{10}^2 + \frac{1}{5}T_{00}^1\,,$$
$$N_{20} = \frac{2}{10}T_{10}^2 + \frac{2}{10}T_{20}^2 + \frac{1}{10}T_{20}^3 + \frac{1}{10}T_{20}^4 + \frac{1}{10}T_{10}^1\,,$$
$$N_{30} = \frac{2}{10}T_{40}^2 + \frac{2}{10}T_{20}^2 + \frac{1}{10}T_{20}^3 + \frac{1}{10}T_{20}^4 + \frac{1}{10}T_{40}^1\,,$$
$$N_{40} = \frac{1}{5}T_{40}^1 + \frac{2}{5}T_{40}^2 + \frac{1}{5}T_{50}^1\,,$$

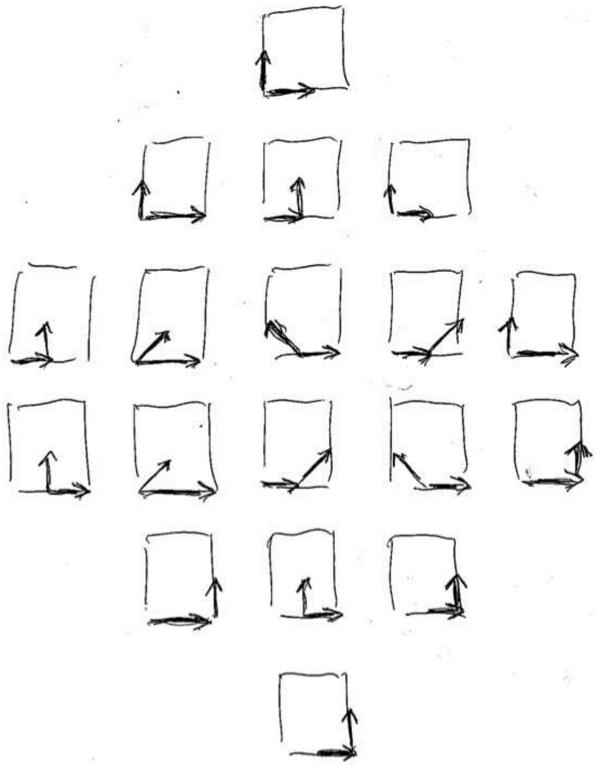

FIG. 7 – *Degré 5 : les vecteurs composants les coefficients de contrôle pour $v = 0$, de haut en bas, pour N_{00}, $N_{10}, ..., N_{50}$.*

$$N_{50} = T^1_{50}\,,$$

on additionne et on regroupe les termes en explicitant les Bernstein, en premier il vient la somme :

$$\begin{gathered}(1-u)^5 T^1_{00} + \\ u(1-u)^4(T^1_{10} + 2T^2_{10} + T^1_{00}) + \\ u^2(1-u)^3(2T^2_{10} + 2T^2_{20} + T^3_{20} + T^4_{20} + T^1_{10}) + \\ u^3(1-u)^2(2T^2_{40} + 2T^2_{20} + T^3_{20} + T^4_{20} + T^1_{40}) + , \\ u^4(1-u)(T^1_{40} + 2T^2_{40} + T^1_{50}) + \\ u^5 T^1_{50}\,.\end{gathered}$$

En factorisant les termes identiques, on trouve comme polynôme des sommes du genre $u^k(1-u)^l + u^{k+1}(1-u)^{l-1}$ qui se simplifie en $u^k(1-u)^{l-1}$ donc le degré est passé de $k+l$ à $k+l-1$. Par suite, par regroupement, la somme se réduit à :

$$\begin{gathered}(1-u)^4 T^1_{00} + \\ u(1-u)^3(T^1_{10} + 2T^2_{10}) + \\ u^2(1-u)^2(2T^2_{20} + T^3_{20} + T^4_{20}) + \\ u^3(1-u)(T^1_{40} + 2T^2_{40}) + \\ u^4 T^1_{50}\,,\end{gathered}$$

qui s'écrit aussi :

$$\begin{gathered}(1-u)^4 T^1_{00} + \\ 4u(1-u)^3(\frac{1}{4}T^1_{10} + \frac{2}{4}T^2_{10}) +\end{gathered}$$

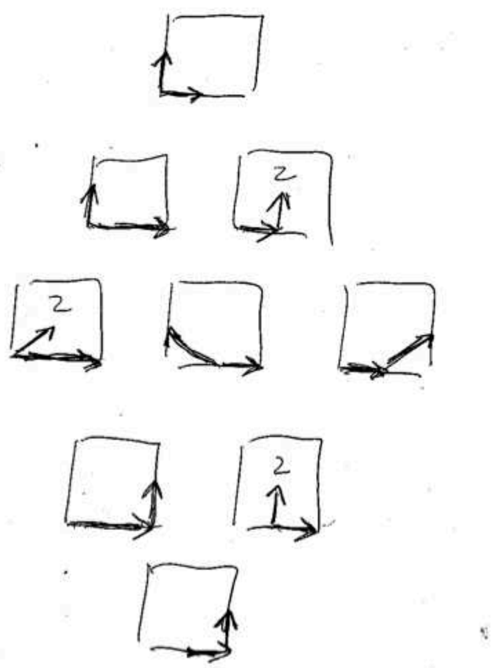

FIG. 8 – *Degré 4 : les vecteurs composants les coefficients de contrôle pour $v = 0$, de haut en bas, pour M_{00}, $M_{10}, ..., M_{40}$.*

$$6u^2(1-u)^2(\frac{2}{6}T^2_{20} + \frac{1}{6}T^3_{20} + \frac{1}{6}T^4_{20}) +$$
$$4u^3(1-u)(\frac{1}{4}T^1_{40} + \frac{2}{4}T^2_{40}) +$$
$$u^4 T^1_{50}\,,$$

soit la forme cherchée de degré 4 seulement :

$$\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0} B^4_i(u) M_{ij}\,,$$

avec comme M_{ij} les expressions ci-dessus, Figure (8).

Avant de poursuivre, on vérifie que l'on perd encore un ordre quand les poids son égaux. Comme les poids se factorisent, on les oublie. Il reste alors, en explicitant les T^k_{ij} (sans poids) :

$$(1-u)^4|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}| +$$
$$u(1-u)^3(|\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}| + 2|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}|) +$$
$$u^2(1-u)^2(2|\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}| + |\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{01}}| + |\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{21}}|) +$$
$$u^3(1-u)(|\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}| + 2|\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}|) +$$
$$u^4|\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}|\,,$$

ouvert en :

$$(1-u)^4|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}| +$$
$$u(1-u)^3(|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} + \overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}| + 2|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}|) +$$
$$u^2(1-u)^2(2|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} + \overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{11}}| + |\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{00}} + \overrightarrow{P_{00}P_{01}}| + |\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{20}} + \overrightarrow{P_{20}P_{21}}|) +$$
$$u^3(1-u)(|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} + \overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}| + 2|\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}|) +$$

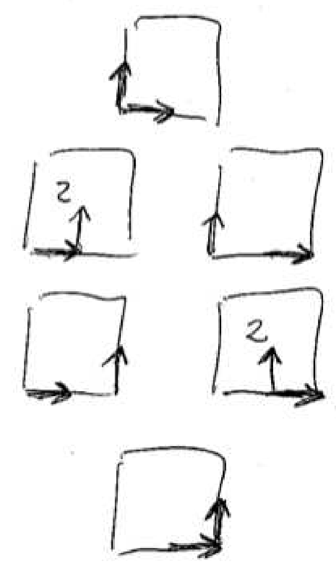

FIG. 9 – *Degré 3 : les vecteurs composants les coefficients de contrôle pour $v = 0$, de haut en bas, pour M_{00}, $M_{10}, ..., M_{30}$.*

$$u^4|\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}|\,,$$

écriture qui permet les regroupements, on trouve :

$$\begin{gathered}(1-u)^3|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}| + \\ u(1-u)^2(2|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}| + |\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}|) + \\ u^2(1-u)(|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}| + 2|\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}|) + \\ u^3|\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}|\,,\end{gathered}$$

soit :

$$\begin{gathered}(1-u)^3|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}| + \\ 3u(1-u)^2(\frac{2}{3}|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}| + \frac{1}{3}|\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{00}P_{01}}|) + \\ 3u^2(1-u)(\frac{1}{3}|\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}| + \frac{2}{3}|\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}|) + \\ u^3|\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}|\,,\end{gathered}$$

et on retrouve donc le cas Bézier classique, Figure (9).

Il est clair que le résultat portant sur le cas général (poids non égaux) reste vrai pour les 4 arêtes du carreau. Pour le carreau de degré 1, on a vu que l'expression obtenue à ce stade se réduisait (en degré), ici, on vient de voir que ceci était vrai pour les arêtes, il est peut être vrai que l'on a la même propriété globalement, la section suivante va essayer de trancher sur ce point.

On vient de voir que la restriction du polynôme aux arêtes n'est que de degré 4. On va se persuader que les coefficients du degré 5 ne sont autres que le résultat de la méthode d'élévation du degré de 1 des coefficients de degré 4. Partons, pour simplifier, de l'arête $v = 0$ donc $j = 0$, le polynôme de degré 4 :

$$\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0} B_i^4(u) M_{ij}\,,$$

peut être élevé au degré 5 par les formules classiques :

$$N_{00} = M_{00}$$

$$N_{50} = N_{40}$$

$$N_{i0} = \frac{iM_{i-1,0} + (5-i)M_{i,0}}{5} \text{ pour } i = 1, 4 \,.$$

Regardons N_{10}, on a :

$$N_{10} = \frac{M_{00} + 4M_{10}}{5} \,,$$

$$N_{10} = \frac{T^1_{00} + T^1_{10} + 2T^2_{10}}{5} \,,$$

qui est identique au coefficient trouvé ci-dessus directement. Le même raisonnement s'applique à tous les coefficients. Par suite :

$$\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0} B^5_i(u)N_{ij} \;=\; \sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0} B^4_i(u)M_{ij} \,,$$

et on a le même résultat pour les autres arêtes.

Ceci termine le cas des arêtes du carreau et à ce stade, pour le carreau entier, on a un polynôme de degré 5×5 qui, donc, se réduit sur les arêtes à un polynôme de degré 4.

Les coefficients sont au nombre de 36. Les termes, les T^k_{ij}, sont au nombre de 324 mais certains sont redondants (au moins ceux des arêtes comme on l'a vu). Est à dire que l'on peut trouver globalement un polynôme de degré plus bas que 5×5 ? Nous avons calculé explicitement le terme N_{11} (qui comprend 9 termes) et nous avons observé l'existence de redondances, ceci suggére une nouvelle fois l'existence d'une écriture de plus bas degré. Pour la chercher, on va utiliser la troisième méthode d'analyse adoptée dans le cas du carreau de degré 1.

5.3 Réduction directe du jacobien

On repart de l'expression initiale du polynôme dans la présentation par composante, c'est-à-dire :

$$\mathcal{J}(u,v) \;=\; \frac{1}{D(u,v)^3} \,|\, \frac{\partial Q}{\partial u} \quad \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \overrightarrow{OQ} \,| \,,$$

mais on considère la combinaison, pour u et v non nuls :

$$\mathcal{J}^*(u,v) \;=\; |\, \overrightarrow{OQ} - \frac{u}{2}\frac{\partial Q}{\partial u} \quad \overrightarrow{OQ} - \frac{v}{2}\frac{\partial Q}{\partial v} \quad \overrightarrow{OQ} \,| \,,$$

en remarquant que $\mathcal{J}^*(u,v) = \frac{uv}{4}\mathcal{J}(u,v)$ (hors le coefficient $D^3(u,v)$) et donc a le même signe. La première colonne de ce nouveau déterminant est :

$$\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B^2_i(u)B^2_j(v)Q_{ij} \;-\; u \sum_{i=0,1}\sum_{j=0,2} B^1_i(u)B^2_j(v)\Delta^{10Q}_{ij} \,,$$

soit :

$$\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B^2_i(u)B^2_j(v)Q_{ij} \;-\; u \sum_{i=0,1}\sum_{j=0,2} B^1_i(u)B^2_j(v)(Q_{i+1,j} - Q_{ij}) \,,$$

$$\sum_{j=0,2} B^2_j(v) \left\{ \sum_{i=0,2} B^2_i(u)Q_{ij} \;-\; u \sum_{i=0,1} B^1_i(u)(Q_{i+1,j} - Q_{ij}) \right\} \,,$$

qui se réduit à :

$$\sum_{j=0,2} B^2_j(v) \sum_{i=0,1} B^1_i(u)Q_{ij} \,,$$

soit[5] :

$$\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,2} B_i^1(u)B_j^2(v)Q_{ij}\,,$$

et un calcul analogue donne la seconde colonne :

$$\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,1} B_i^2(u)B_j^1(v)Q_{ij}\,,$$

et notre déterminant vaut :

$$|\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,2} B_i^1(u)B_j^2(v)Q_{ij} \quad \sum_{i=0,2}\sum_{j=0,1} B_i^2(u)B_j^1(v)Q_{ij} \quad \sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)Q_{ij}\,|\,,$$

ou encore :

$$\sum_{i_1=0,1}\sum_{i_2=0,2}\sum_{i=0,2}\sum_{j_1=0,2}\sum_{j_2=0,1}\sum_{j=0,2} B_{i_1}^1(u)B_{i_2}^2(u)B_i^2(u)B_{j_1}^2(v)B_{j_2}^1(v)B_j^2(v)\,|\,Q_{i_1j_1} \quad Q_{i_2j_2} \quad Q_{ij}\,|\,,$$

et, ainsi :

$$\mathcal{J}^*(u,v) \;=\; \sum_{I=0,5}\sum_{J=0,5} B_I^5(u)B_J^5(v)N_{IJ}\,.$$

avec

$$N_{IJ} = \sum_{i_1+i_2+i=I}\;\sum_{j_1+j_2+j=J} \frac{C_{j_1}^2 C_{i_2}^2 C_i^2 C_j^2}{C_I^5 C_J^5}\,|\,Q_{i_1j_1} \quad Q_{i_2j_2} \quad Q_{ij}\,|\,. \tag{6}$$

Comme pour le degré 1, ce formalisme va permettre de trouver de nombreux termes nuls dans l'ensemble des combinaisons d'indices possibles (donc 324) et, d'autre part, de passer facilement à une formulation en P_{ij}.

On en déduit que, pour u et v non nuls, $\mathcal{J}(u,v)$ est de degré 4 dans chaque direction et ses coefficients de contrôle sont calculables. En effet, comme $\mathcal{J}^*(u,v) = \frac{uv}{4}\mathcal{J}(u,v)$ et que $\mathcal{J}^*(u,v)$ est de degré 5 dans chaque direction, $\mathcal{J}(u,v)$ peut s'écrire :

$$\mathcal{J}(u,v) \;=\; \sum_{I=0,4}\sum_{J=0,4} B_I^4(u)B_J^4(v)M_{IJ}\,,$$

les M_{ij} étant à déterminer, et on a :

$$\sum_{I=0,5}\sum_{J=0,5} B_I^5(u)B_J^5(v)N_{IJ} = \frac{uv}{4}\sum_{I=0,4}\sum_{J=0,4} B_I^4(u)B_J^4(v)M_{IJ}\,.$$

On établit également que :

$$\sum_{I=0}\sum_{J=0,5} B_0^5(u)B_J^5(v)N_{0J} = 0\,,$$

ce qui implique que les N_{0J} sont nuls et de même pour $J=0$ et $I=0,5$ au regard des N_{I0}, c'est le lemme suivant :

[5]et ce résultat est vrai pour tous les degrés, par exemple pour $d=3$, on considère la combinaison :

$$\mathcal{J}^*(u,v) \;=\; |\,\overrightarrow{OQ} - \frac{u}{3}\frac{\partial Q}{\partial u} \quad \overrightarrow{OQ} - \frac{v}{3}\frac{\partial Q}{\partial v} \quad \overrightarrow{OQ}\,|\,,$$

et on trouve comme première colonne du déterminant :

$$\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,3} B_i^2(u)B_j^3(v)Q_{ij}\,,$$

ce qui nous permettra d'étendre les résultats sur le polynôme pour d quelconque.

Lemme Les N_{0J} et les N_{I0} sont nuls pour tout J et tout I. $\square$

Démonstration : la relation $\mathcal{J}^*(u,v) = \frac{uv}{4}\mathcal{J}(u,v)$ établie pour u et v non nuls reste vraie, par continuité pour u ou v nul. Donc $\mathcal{J}^*(0,v) = 0 = \sum_{J=0,5} B_J^5(v) N_{0J}$, ce qui montre que les N_{0J} sont nuls et le lemme est démontré.

Suite au lemme, l'expression au degré 5 :

$$\sum_{I=0,5} \sum_{J=0,5} B_I^5(u) B_J^5(v) N_{IJ}$$

n'est autre que :

$$\sum_{I=1,5} \sum_{J=1,5} B_I^5(u) B_J^5(v) N_{IJ} \,,$$

et, par suite, on retrouve que uv se factorise, permettant de descendre le degré de 1 dans chaque direction. La somme s'écrit aussi :

$$\sum_{I=1,5} \sum_{J=1,5} \frac{B_I^5(u) B_J^5(v)}{C_I^5 C_J^5} \sum_{i_1+i_2+i=I} \sum_{j_1+j_2+j=J} C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2 \,|\, Q_{i_1j_1} \quad Q_{i_2j_2} \quad Q_{ij} \,| \,,$$

ou encore :

$$uv \sum_{I=0,4} \sum_{J=0,4} \frac{B_I^4(u) B_J^4(v)}{C_I^4 C_J^4} \sum_{i_1+i_2+i=I+1} \sum_{j_1+j_2+j=J+1} C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2 \,|\, Q_{i_1j_1} \quad Q_{i_2j_2} \quad Q_{ij} \,| \,,$$

soit la forme habituelle :

$$uv \sum_{I=0,4} \sum_{J=0,4} B_I^4(u) B_J^4(v) \sum_{i_1+i_2+i=I+1} \sum_{j_1+j_2+j=J+1} \frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{C_I^4 C_J^4} \,|\, Q_{i_1j_1} \quad Q_{i_2j_2} \quad Q_{ij} \,| \,,$$

on en déduit les coefficients M_{IJ} :

$$M_{IJ} \,=\, 4 \sum_{i_1+i_2+i=I+1} \sum_{j_1+j_2+j=J+1} \frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{C_I^4 C_J^4} \,|\, Q_{i_1j_1} \quad Q_{i_2j_2} \quad Q_{ij} \,| \,. \tag{7}$$

Nous avons d'ailleurs vérifié explicitement que l'expression ci-dessus pour $J = 0$, donc M_{I0}, redonnait exactement les résultats obtenus par un calcul direct par la Formule (5), c'est-à-dire en utilisant les $\Delta_{ij}^{\cdot\cdot Q}$. Donc M_{0J} convient aussi. Ceci suffit pour se convaincre que la formule générique donnant les M_{IJ} s'applique également aux cas $u = 0$ et $v = 0$ et conclut l'analyse.

5.4 Calculs des coefficients

Pour calculer les coefficients, on va utiliser l'expression au degré 5 qui est relativement facile à manipuler, Formule (6). Ainsi, pour le coefficient N_{11} , les indices intervenant sont formés des couples tel que l'un des i, i_1 ou i_2 vaut 1 et de même en j, Ceci donne, *a priori*, 9 combinaisons dont le terme générique est de la forme (au facteur 4 près) :

$$\frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{C_{i_1+i_2+i}^5 C_{j_1+j_2+j}^5} \,|\, Q_{i_1j_1} \quad Q_{i_2j_2} \quad Q_{ij} \,| \,.$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned} 25 N_{11} = 4|\, Q_{00} \quad Q_{00} \quad Q_{11} \,| + 4|\, Q_{00} \quad Q_{01} \quad Q_{10} \,| + 4|\, Q_{01} \quad Q_{00} \quad Q_{10} \,| + \\ 4|\, Q_{00} \quad Q_{10} \quad Q_{01} \,| + 2|\, Q_{00} \quad Q_{11} \quad Q_{00} \,| + 2|\, Q_{01} \quad Q_{10} \quad Q_{00} \,| + \\ 2|\, Q_{10} \quad Q_{00} \quad Q_{01} \,| + |\, Q_{10} \quad Q_{01} \quad Q_{00} \,| + 2|\, Q_{11} \quad Q_{00} \quad Q_{00} \,| \,, \end{aligned}$$

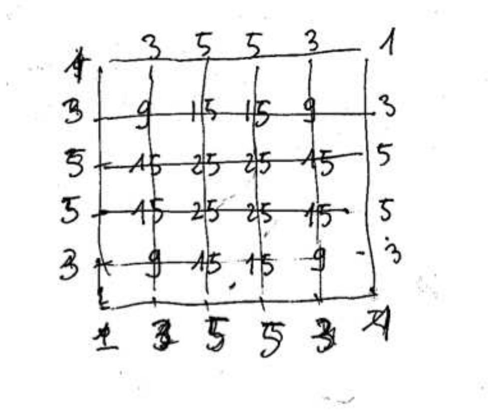

FIG. 10 – *Le nombre de termes de chaque coefficient de contrôle dans l'écriture de degré* 5×5.

qui se réduit à :

$$25N_{11} = 4|\,Q_{00}\quad Q_{01}\quad Q_{10}\,| + 4|\,Q_{01}\quad Q_{00}\quad Q_{10}\,| +$$
$$4|\,Q_{00}\quad Q_{10}\quad Q_{01}\,| + 2|\,Q_{01}\quad Q_{10}\quad Q_{00}\,| +$$
$$2|\,Q_{10}\quad Q_{00}\quad Q_{01}\,| + |\,Q_{10}\quad Q_{01}\quad Q_{00}\,|\,,$$

qui se réduit encore simplement à :

$$25N_{11} = |\,Q_{10}\quad Q_{01}\quad Q_{00}\,|\,,$$

qui n'est autre que $|\,\Delta_{00}^{10Q}\quad \Delta_{01}^{01Q}\quad Q_{00}\,|$, c'est-à-dire, à un facteur près, le premier coefficient de l'arête $v = 0$ calculé précédemment. Ce résultat conduit à continuer, calculons donc N_{21}. On trouve, tout calcul fait :

$$50N_{21} = |\,Q_{20}\quad Q_{01}\quad Q_{00}\,| + 2|\,Q_{10}\quad Q_{11}\quad Q_{00}\,|\,,$$

c'est-à-dire, à un facteur près, le second coefficient de l'arête $v = 0$ calculé précédemment. Notons M_{ij} ces coefficients (au degré 4), on a :

$$N_{11} \text{ qui correspond à } M_{00}\,,$$

$$N_{21} \text{ qui correspond à } M_{10}\,,$$

ainsi que :

$$N_{31} \text{ qui correspond à } M_{20}\,,$$

$$N_{41} \text{ qui correspond à } M_{30}\,,$$

$$N_{51} \text{ qui correspond à } M_{40}\,,$$

ce qui se vérifie facilement (!). Par exemple ($i_1 = 1, i_2 = i = 2$ et les 3 triplets en j donnent N_{51}) :

$$5N_{51} = 2|\,Q_{10}\quad Q_{20}\quad Q_{21}\,| + |\,Q_{10}\quad Q_{21}\quad Q_{20}\,| + 2|\,Q_{11}\quad Q_{20}\quad Q_{20}\,| +$$

soit simplement :

$$5N_{51} = |\,Q_{10}\quad Q_{20}\quad Q_{21}\,|\,,$$

qui vaut, aux poids près :

$$|\,\overrightarrow{P_{21}P_{10}}\quad \overrightarrow{P_{21}P_{20}}\,| = |\,\overrightarrow{P_{20}P_{10}}\quad \overrightarrow{P_{21}P_{20}}\,| = |\,\overrightarrow{P_{10}P_{20}}\quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}\,|\,,$$

qui est bien, à un facteur près M_{40}. Par symétrie, on a aussi :

$$N_{12} \text{ qui correspond à } M_{01}\,,$$

$$N_{13} \text{ qui correspond à } M_{02}\,,$$

$$N_{14} \text{ qui correspond à } M_{03}\,,$$

$$N_{15} \text{ qui correspond à } M_{04}\,,$$

et, encore :

$$N_{25} \text{ qui correspond à } M_{14}\,,$$

$$N_{35} \text{ qui correspond à } M_{24}\,,$$

$$N_{45} \text{ qui correspond à } M_{34}\,,$$

et, aussi :

$$N_{52} \text{ qui correspond à } M_{41}\,,$$

$$N_{53} \text{ qui correspond à } M_{42}\,,$$

$$N_{54} \text{ qui correspond à } M_{43}\,.$$

À ce stade, il reste 9 coefficients, qui sont de trois types, à découvrir. Pour N_{42}, excluant les déterminants trivialement nuls (2 vecteurs identiques), on a :

$$\begin{aligned} 50N_{42} = &|\,Q_{00} \quad Q_{20} \quad Q_{22}\,| + \\ 2&|\,Q_{01} \quad Q_{21} \quad Q_{20}\,| + \\ 4&|\,Q_{01} \quad Q_{20} \quad Q_{21}\,| + \\ 4&|\,Q_{10} \quad Q_{11} \quad Q_{21}\,| + \\ 8&|\,Q_{11} \quad Q_{10} \quad Q_{21}\,| + \\ 2&|\,Q_{12} \quad Q_{10} \quad Q_{20}\,| + \\ 4&|\,Q_{10} \quad Q_{21} \quad Q_{11}\,| + \\ 2&|\,Q_{10} \quad Q_{20} \quad Q_{12}\,| + \\ 4&|\,Q_{11} \quad Q_{21} \quad Q_{10}\,| + \\ 2&|\,Q_{12} \quad Q_{20} \quad Q_{10}\,|\,, \end{aligned}$$

qui se regroupe en :

$$50N_{42} = |\,Q_{00} \quad Q_{20} \quad Q_{22}\,| + 2|\,Q_{01} \quad Q_{20} \quad Q_{21}\,| + 4|\,Q_{10} \quad Q_{21} \quad Q_{11}\,| + 2|\,Q_{10} \quad Q_{20} \quad Q_{12}\,|\,,$$

soit (en omettant les poids) :

$$50N_{42} = |\,\overrightarrow{P_{22}P_{00}} \quad \overrightarrow{P_{22}P_{20}}\,| + 2|\,\overrightarrow{P_{21}P_{01}} \quad \overrightarrow{P_{21}P_{20}}\,| + 4|\,\overrightarrow{P_{11}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{11}P_{21}}\,| + 2|\,\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{12}}\,|\,,$$

ou, sous une forme plus parlante :

$$50N_{42} = |\,\overrightarrow{P_{00}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{22}}\,| + 2|\,\overrightarrow{P_{01}P_{21}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}\,| + 4|\,\overrightarrow{P_{11}P_{21}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}\,| + 2|\,\overrightarrow{P_{10}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{12}}\,|\,,$$

et les coefficients N_{44}, N_{22} et N_{24} ont le même aspect. Ne reste à examiner que N_{33} et N_{43} qui doivent avoir le même aspect que N_{32}, N_{34} et N_{23}. Pour N_{43}, excluant les déterminants trivialement nuls (2 vecteurs identiques), on a :

$$\begin{aligned} 50N_{43} = &|\,Q_{00} \quad Q_{21} \quad Q_{22}\,| + \\ &|\,Q_{02} \quad Q_{21} \quad Q_{20}\,| + \\ 2&|\,Q_{02} \quad Q_{20} \quad Q_{21}\,| + \\ 2&|\,Q_{01} \quad Q_{20} \quad Q_{22}\,| + \\ 2&|\,Q_{10} \quad Q_{11} \quad Q_{22}\,| + \\ 2&|\,Q_{12} \quad Q_{11} \quad Q_{20}\,| + \end{aligned}$$

$$4|\, Q_{12} \quad Q_{10} \quad Q_{21}\,| +$$
$$4|\, Q_{11} \quad Q_{10} \quad Q_{22}\,| +$$
$$2|\, Q_{10} \quad Q_{21} \quad Q_{12}\,| +$$
$$2|\, Q_{12} \quad Q_{21} \quad Q_{10}\,| +$$
$$4|\, Q_{12} \quad Q_{20} \quad Q_{11}\,| +$$
$$4|\, Q_{11} \quad Q_{20} \quad Q_{12}\,|\,,$$

qui se réduit à :

$$50N_{43} = |\, Q_{00} \quad Q_{21} \quad Q_{22}\,| +$$
$$|\, Q_{02} \quad Q_{20} \quad Q_{21}\,| +$$
$$2|\, Q_{01} \quad Q_{20} \quad Q_{22}\,| +$$
$$2|\, Q_{12} \quad Q_{11} \quad Q_{20}\,| +$$
$$4|\, Q_{12} \quad Q_{10} \quad Q_{21}\,| +$$
$$2|\, Q_{11} \quad Q_{10} \quad Q_{22}\,|\,,$$

soit (hors poids) :

$$50N_{43} = |\, \overrightarrow{P_{22}P_{00}} \quad \overrightarrow{P_{22}P_{21}}\,| + |\, \overrightarrow{P_{21}P_{02}} \quad \overrightarrow{P_{21}P_{20}}\,| + 2|\, \overrightarrow{P_{22}P_{01}} \quad \overrightarrow{P_{22}P_{20}}\,| +$$
$$2|\, \overrightarrow{P_{20}P_{12}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{11}}\,| + 4|\, \overrightarrow{P_{21}P_{12}} \quad \overrightarrow{P_{21}P_{10}}\,| + 2|\, \overrightarrow{P_{22}P_{11}} \quad \overrightarrow{P_{22}P_{10}}\,|\,,$$

ou encore :

$$50N_{43} = |\, \overrightarrow{P_{00}P_{22}} \quad \overrightarrow{P_{21}P_{22}}\,| + |\, \overrightarrow{P_{02}P_{21}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}\,| + 2|\, \overrightarrow{P_{01}P_{22}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{22}}\,| +$$
$$2|\, \overrightarrow{P_{12}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{11}P_{20}}\,| + 4|\, \overrightarrow{P_{12}P_{21}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{21}}\,| + 2|\, \overrightarrow{P_{11}P_{22}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{22}}\,|\,,$$

et, au final :

$$50N_{43} = |\, \overrightarrow{P_{00}P_{21}} \quad \overrightarrow{P_{21}P_{22}}\,| + |\, \overrightarrow{P_{02}P_{21}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{21}}\,| + 2|\, \overrightarrow{P_{01}P_{22}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{22}}\,| +$$
$$2|\, \overrightarrow{P_{11}P_{20}} \quad \overrightarrow{P_{11}P_{12}}\,| + 4|\, \overrightarrow{P_{12}P_{21}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{21}}\,| + 2|\, \overrightarrow{P_{11}P_{22}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{11}}\,|\,,$$

et le seul coefficient non encore élucidé est N_{33}. Il y a 25 termes (un seul étant trivialement nul) qui se regroupent, les combinaisons résultant du croisement des indices, en i, $021, 012, 111, 120, 102$ avec, en j, $012, 111, 210, 201, 102$, soit :

$$100N_{33} = 2|\, Q_{00} \quad Q_{21} \quad Q_{12}\,| + 8|\, Q_{01} \quad Q_{21} \quad Q_{11}\,| +$$
$$2|\, Q_{02} \quad Q_{21} \quad Q_{10}\,| + 4|\, Q_{02} \quad Q_{20} \quad Q_{11}\,| + 4|\, Q_{01} \quad Q_{20} \quad Q_{12}\,| +$$
$$2|\, Q_{00} \quad Q_{11} \quad Q_{22}\,| + 8|\, Q_{01} \quad Q_{11} \quad Q_{21}\,| +$$
$$2|\, Q_{02} \quad Q_{11} \quad Q_{20}\,| + 4|\, Q_{02} \quad Q_{10} \quad Q_{21}\,| + 4|\, Q_{01} \quad Q_{10} \quad Q_{22}\,| +$$
$$4|\, Q_{10} \quad Q_{11} \quad Q_{12}\,| + 4|\, Q_{12} \quad Q_{11} \quad Q_{10}\,| +$$
$$8|\, Q_{12} \quad Q_{10} \quad Q_{11}\,| + 8|\, Q_{11} \quad Q_{10} \quad Q_{12}\,| +$$
$$|\, Q_{10} \quad Q_{21} \quad Q_{02}\,| + 4|\, Q_{11} \quad Q_{21} \quad Q_{01}\,| +$$
$$|\, Q_{12} \quad Q_{21} \quad Q_{00}\,| + 2|\, Q_{12} \quad Q_{20} \quad Q_{01}\,| + 2|\, Q_{11} \quad Q_{20} \quad Q_{02}\,| +$$
$$|\, Q_{10} \quad Q_{01} \quad Q_{22}\,| + 4|\, Q_{11} \quad Q_{01} \quad Q_{21}\,| +$$
$$|\, Q_{12} \quad Q_{01} \quad Q_{20}\,| + 2|\, Q_{12} \quad Q_{00} \quad Q_{21}\,| + 2|\, Q_{11} \quad Q_{00} \quad Q_{22}\,|\,,$$

soit seulement :

$$100N_{33} = 3|\, Q_{00} \quad Q_{21} \quad Q_{12}\,| + 3|\, Q_{01} \quad Q_{20} \quad Q_{12}\,| +$$
$$3|\, Q_{02} \quad Q_{10} \quad Q_{21}\,| +$$

$$3|\,Q_{01} \quad Q_{10} \quad Q_{22}\,|\,,$$

soit (hors poids) :

$$100 N_{33} = 3|\,\overrightarrow{P_{12}P_{00}} \quad \overrightarrow{P_{12}P_{21}}\,| + 3|\,\overrightarrow{P_{12}P_{01}} \quad \overrightarrow{P_{12}P_{20}}\,| +$$
$$3|\,\overrightarrow{P_{21}P_{02}} \quad \overrightarrow{P_{21}P_{10}}\,| +$$
$$3|\,\overrightarrow{P_{22}P_{01}} \quad \overrightarrow{P_{22}P_{10}}\,|\,,$$

ou, au final :

$$100 N_{33} = 3|\,\overrightarrow{P_{00}P_{12}} \quad \overrightarrow{P_{21}P_{12}}\,| + 3|\,\overrightarrow{P_{01}P_{12}} \quad \overrightarrow{P_{20}P_{12}}\,| +$$
$$3|\,\overrightarrow{P_{10}P_{21}} \quad \overrightarrow{P_{21}P_{02}}\,| +$$
$$3|\,\overrightarrow{P_{01}P_{10}} \quad \overrightarrow{P_{10}P_{22}}\,|\,,$$

Pour conclure, on représente, pour chaque type de coefficients, les vecteurs composants le ou les termes de ce coefficient, Figure (**??**), en notant que le coefficient calculé comme N_{IJ}, au degré 5, n'est autre que le coefficient $N_{I-1,J-1}$ de la figure. On remarque la spécificité des vecteurs composants les coefficients et également une particularité sur le nombre de termes par coefficient (classiquement, le nombre de termes résulte du produit dans les deux directions du nombre de termes des coefficients d'arête, Figure (10)).

Remarque. La présence de nombreux termes nuls et les regroupements nombreux qui existent suggère la possibilité de trouver une formule plus directe pour obtenir les coefficients mais nous ne l'avons pas trouvé.

5.5 Conclusion sur le carreau quadrilatéral de degré 2

Le jacobien se comporte comme le polynôme :

$$\mathcal{J}(u,v) = \sum_{I=0,4} \sum_{J=0,4} B_I^4(u) B_J^4(v)\, M_{IJ}\,,$$

avec :

$$M_{IJ} = 4 \sum_{i_1+i_2+i=I+1} \sum_{j_1+j_2+j=J+1} \frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{C_I^4 C_J^4} \,|\,Q_{i_1j_1} \quad Q_{i_2j_2} \quad Q_{ij}\,|\,,$$

ou encore. Figure 11 :

$$M_{IJ} = 4 \sum_{i_1+i_2+i=I+1} \sum_{j_1+j_2+j=J+1} \omega_{i_1j_1}\omega_{i_2j_2}\omega_{ij} \frac{C_{i_2}^2 C_i^2 C_{j_1}^2 C_j^2}{C_I^4 C_J^4} \,|\,\overrightarrow{P_{ij}P_{i_1j_1}} \quad \overrightarrow{P_{ij}P_{i_2j_2}}\,|\,,$$

et les poids interviennent (sauf pour les coefficients réduits à un seul terme) pour contrôler le signe des coefficients et, ainsi, la validité de l'élément.

On peut aussi utiliser les coefficients du degré 5 et alors :

$$M_{IJ} = 4 \frac{C_{I+1}^5 C_{J+1}^5}{C_I^4 C_J^4} N_{I+1,J+1}\,.$$

À noter que le degré est de 1 supérieur à celui du carreau classique, cf. [3].

6 Extension au carreau volumique

Les arêtes sont des Bézier rationnelles de degré 2 comme dans le cas précédent mais les points de contrôle sont maintenant dans $\mathbb{R}^3$.

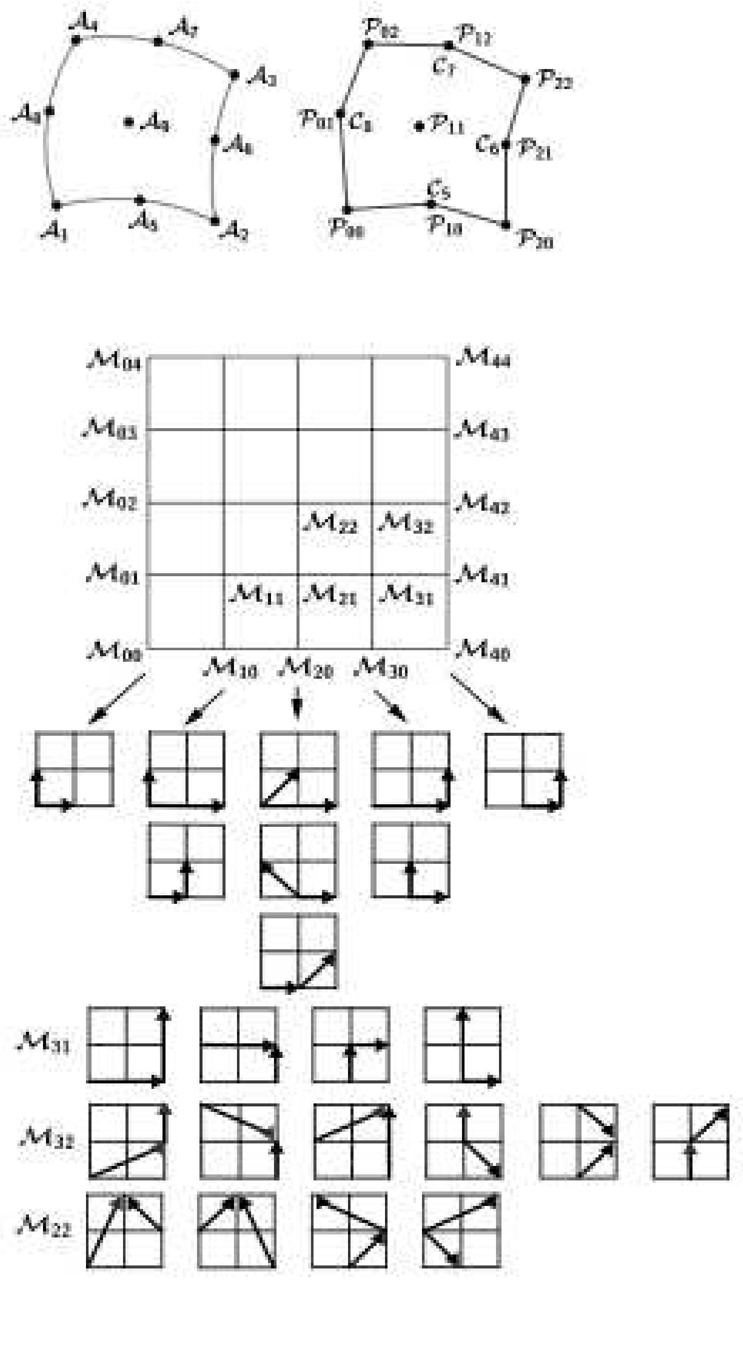

FIG. 11 – *De haut en bas. Le carreau, ses nœuds (notation éléments finis), ses points de contrôle (notation Bézier). L'arrangement des coefficients de contrôle. Les vecteurs composants quelques coefficients, un de chaque type, les autres s'en déduisant.*

6.1 Méthode formelle par composantes

On considère le point $P = \theta(u,v,w)$ et on note (x,y,z) ses coordonnées. Si $(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$ désigne les coordonnées du point de contrôle P_{ijk}, on a :

$$x = \frac{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}\sum_{k=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)B_k^2(w)\omega_{ijk}x_{ijk}}{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}\sum_{k=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)B_k^2(w)\omega_{ijk}},$$

$$y = \frac{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}\sum_{k=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)B_k^2(w)\omega_{ijk}y_{ijk}}{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}\sum_{k=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)B_k^2(w)\omega_{ijk}},$$

$$z = \frac{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}\sum_{k=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)B_k^2(w)\omega_{ijk}z_{ijk}}{\sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}\sum_{k=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)B_k^2(w)\omega_{ijk}},$$

Le jacobien s'exprime comme le déterminant :

$$\mathcal{J}(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Si on note $D = D(u,v,w) = \sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}\sum_{k=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)B_k^2(w)\omega_{ijk}$, on a :

$$\mathcal{J}(u,v,w) = \frac{1}{D^6}\begin{vmatrix} D\frac{\partial X}{\partial u} - X\frac{\partial D}{\partial u} & D\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial D}{\partial v} & D\frac{\partial X}{\partial w} - X\frac{\partial D}{\partial w} \\ D\frac{\partial Y}{\partial u} - Y\frac{\partial D}{\partial u} & D\frac{\partial Y}{\partial v} - Y\frac{\partial D}{\partial v} & D\frac{\partial Y}{\partial w} - Y\frac{\partial D}{\partial w} \\ D\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial D}{\partial u} & D\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial D}{\partial v} & D\frac{\partial Z}{\partial w} - Z\frac{\partial D}{\partial w} \end{vmatrix},$$

avec, maintenant, $X = \sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}\sum_{k=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)B_k^2(w)\omega_{ijk}x_{ijk}$ et $Y = \sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}\sum_{k=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)B_k^2(w)\omega_{ijk}y_{ijk}$ et enfin $Z = \sum_{i=0,2}\sum_{j=0,2}\sum_{k=0,2} B_i^2(u)B_j^2(v)B_k^2(w)\omega_{ijk}z_{ijk}$, les numérateurs de ces quantités telles que définies initialement.

En développant ce déterminant par rapport à la troisième colonne, on obtient :

$$\frac{1}{D^5}\left\{D(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}) + X(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Y(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u})\right\}\left\{D\frac{\partial Z}{\partial w} - Z\frac{\partial D}{\partial w}\right\}$$
$$-\frac{1}{D^5}\left\{D(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) + X(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Z(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u})\right\}\left\{D\frac{\partial Y}{\partial w} - Y\frac{\partial D}{\partial w}\right\}$$
$$+\frac{1}{D^5}\left\{D(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) + Y(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Z(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u})\right\}\left\{D\frac{\partial X}{\partial w} - X\frac{\partial D}{\partial w}\right\},$$

soit, au facteur D^5 près :

$$\left\{D(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}) + X(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Y(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u})\right\} D\frac{\partial Z}{\partial w}$$
$$-\left\{D(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}) + X(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Y(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u})\right\} Z\frac{\partial D}{\partial w}$$
$$-\left\{D(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) + X(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Z(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u})\right\} D\frac{\partial Y}{\partial w}$$
$$+\left\{D(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) + X(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Z(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u})\right\} Y\frac{\partial D}{\partial w}$$
$$+\left\{D(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) + Y(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Z(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u})\right\} D\frac{\partial X}{\partial w},$$

$$- \left\{ D(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) + Y(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Z(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}) \right\} X\frac{\partial D}{\partial w} \,,$$

qui se simplifie en :

$$\left\{ D(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}) + X(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Y(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}) \right\} D\frac{\partial Z}{\partial w}$$

$$- \left\{ D(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}) \right\} Z\frac{\partial D}{\partial w}$$

$$- \left\{ D(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) + X(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Z(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}) \right\} D\frac{\partial Y}{\partial w}$$

$$+ \left\{ D(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) \partial u) \right\} Y\frac{\partial D}{\partial w}$$

$$+ \left\{ D(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) + Y(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Z(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}) \right\} D\frac{\partial X}{\partial w} \,,$$

$$- \left\{ D(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) \right\} X\frac{\partial D}{\partial w} \,,$$

et D se factorise à nouveau, il reste :

$$\left\{ D(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}) + X(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Y(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}) \right\} \frac{\partial Z}{\partial w}$$

$$- \left\{ (\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}) \right\} Z\frac{\partial D}{\partial w}$$

$$- \left\{ D(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) + X(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Z(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}) \right\} \frac{\partial Y}{\partial w}$$

$$+ \left\{ (\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) \partial u) \right\} Y\frac{\partial D}{\partial w}$$

$$+ \left\{ D(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) + Y(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial u}) + Z(\frac{\partial D}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}) \right\} \frac{\partial X}{\partial w} \,,$$

$$- \left\{ (\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}) \right\} X\frac{\partial D}{\partial w} \,,$$

qui se regroupe en :

$$D \left\{ (\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u})\frac{\partial Z}{\partial w} - (\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u})\frac{\partial Y}{\partial w} + (\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u})\frac{\partial X}{\partial w} \right\} \,,$$

pour le facteur en D. De manière identique, en regroupant les facteurs de X, Y et Z, l'expression initiale s'écrit aussi comme le déterminant :

$$\frac{1}{D^4} \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} & X \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial w} & Y \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial w} & Z \\ \frac{\partial T}{\partial u} & \frac{\partial T}{\partial v} & \frac{\partial T}{\partial w} & T \end{vmatrix} \,,$$

avec $T = D(u, v, w)$. Passant dans $\mathbb{R}^4$, on définit les points Q_{ijk} par $Q_{ijk} = (P_{ijk}, \omega_{ijk})$, c'est-à-dire de coordonnées $(\omega_{ijk}x_{ijk}, \omega_{ijk}y_{ijk}, \omega_{ijk}z_{ijk}, \omega_{ijk}t_{ijk})$ avec $t_{ijk} = 1$ puis le point Q de $\mathbb{R}^4$ de coordonnées (X, Y, Z, T) données par :

$$X = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) \omega_{ijk} x_{ijk} \,,$$

$$Y = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) \omega_{ijk} y_{ijk} \,,$$

$$Z = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) \omega_{ijk} z_{ijk} \,,$$

$$T = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) \omega_{ijk} t_{ijk} \,,$$

alors ce point de $\mathbb{R}^4$ est défini par un Bézier classique :

$$Q(u,v,w) = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) Q_{ijk} \,,$$

et on a (si O désigne l'origine) :

$$\mathcal{J}(u,v,w) \;=\; \frac{1}{D(u,v)^4} \,|\, \frac{\partial Q}{\partial u} \quad \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \overrightarrow{OQ} \,| \,,$$

c'est-à-dire que le jacobien a une interprétation dans l'espace de dimension supérieure. Son signe est celui de :

$$|\, \frac{\partial Q}{\partial u} \quad \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \overrightarrow{OQ} \,| \,,$$

et le polynôme correspondant est obtenu en exprimant ces quantités. Donc, *a priori*, on a :

$$\mathcal{J}(u,v,w) \;=\; \frac{8}{D(u,v)^4} \,|\, \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^1(u) B_j^2(v) B_k^2(w) \Delta_{ijk}^{100Q} \quad \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^1(v) B_k^2(w) \Delta_{ijk}^{010Q} \quad ...$$

$$... \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,1} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^1(w) \Delta_{ijk}^{001Q} \quad \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) Q_{ijk} \quad | \,,$$

qui semble être de degré $7 \times 7 \times 7$ et doit s'écrire (au facteur $\frac{8}{D^4}$ près) :

$$\mathcal{J}(u,v,w) \;=\; \sum_{I=0,7} \sum_{J=0,7} \sum_{K=0,7} B_I^7(u) B_J^7(v) B_K^7(w) \sum_{i_1+i_2+i_3+i=I} \; \sum_{j_1+j_2+j_3+j=J} \; \sum_{k_1+k_2+k_3+k=K} \frac{C_{j_1}^2 C_{k_1}^2 C_{i_2}^2 C_{k_2}^2 C_{i_3}^2 C_{j_3}^2 C_i^2 C_j^2 C_k^2}{C_I^7 C_J^7 C_K^7} ...$$

$$... \,|\, \Delta_{i_1 j_1 k_1}^{100Q} \quad \Delta_{i_2 j_2 k_2}^{010Q} \quad \Delta_{i_3 j_3 k_3}^{001Q} \quad Q_{ijk} \,| \,,$$

où l'on devine les coefficients N_{IJK}. Cette expression semble difficile à affiner.

6.2 Réduction directe du jacobien

On considère, comme pour le carreau en 2-dimensions, la combinaison (u, v et w non nuls) :

$$\mathcal{J}^*(u,v,w) \;=\; |\, \overrightarrow{OQ} - \frac{u}{2} \frac{\partial Q}{\partial u} \quad \overrightarrow{OQ} - \frac{v}{2} \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \overrightarrow{OQ} - \frac{w}{2} \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \overrightarrow{OQ} \,| \,,$$

en notant que $\mathcal{J}^*(u,v,w) = -\frac{uvw}{8} \mathcal{J}^(u,v,w)$. La première colonne de ce nouveau déterminant se réduit. En effet :

$$\overrightarrow{OQ} - \frac{u}{2} \frac{\partial Q}{\partial u} = \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) Q_{ijk} - u \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^1(u) B_j^2(v) B_k^2(w) \Delta_{ijk}^{10Q} \,,$$

soit :

$$\sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) Q_{ijk} - u \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^1(u) B_j^2(v) B_k^2(w) (Q_{i+1,jk} - Q_{ijk}) \,,$$

$$\sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_j^2(v) B_k^2(w) \left\{ \sum_{i=0,2} B_i^2(u) Q_{ijk} \;-\; u \sum_{i=0,1} B_i^1(u) (Q_{i+1,jk} - Q_{ijk}) \right\} \,,$$

qui se réduit à :

$$\sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_j^2(v) B_k^2(w) \sum_{i=0,1} B_i^1(u) Q_{ijk}\,,$$

soit :

$$\sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^1(u) B_j^2(v) B_k^2(w) Q_{ijk}\,,$$

et un calcul analogue donne les colonnes 2 et 3, à savoir :

$$\sum_{i=0,2} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^1(v) B_k^2(w) Q_{ijk}\,,$$

$$\sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,1} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^1(w) Q_{ijk}\,,$$

par suite, le déterminant s'exprime en fonction des Q_{ijk} et non plus en fonction des $\Delta_{ijk}^{\cdots Q}$ et uvw se factorise, ce qui va permettre de simplifier son expression. On examine ainsi le déterminant (au facteur[6] $-\frac{uvw}{8}$ près) :

$$| \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^1(u) B_j^2(v) B_k^2(w) Q_{ijk} \quad \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^1(v) B_k^2(w) Q_{ijk}$$

$$\sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,1} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^1(w) Q_{ijk} \quad \sum_{i=0,2} \sum_{j=0,2} \sum_{k=0,2} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^2(w) Q_{ijk} |\,,$$

ou, mieux :

$$\mathcal{J}^*(u,v,w) \;=\; \sum_{I=0,7} \sum_{J=0,7} \sum_{K=0,7} B_I^7(u) B_J^7(v) B_K^7(w) \sum_{i_1+i_2+i_3+i=I} \; \sum_{j_1+j_2+j_3+j=J} \; \sum_{k_1+k_2+k_3+k=K} \frac{C_{j_1}^2 C_{k_1}^2 C_{i_2}^2 C_{k_2}^2 C_{i_3}^2 C_{j_3}^2 C_i^2 C_j^2 C_k^2}{C_I^7 C_J^7 C_K^7} \ldots$$

$$\ldots | \, Q_{i_1 j_1 k_1} \quad Q_{i_2 j_2 k_2} \quad Q_{i_3 j_3 k_3} \quad Q_{ijk} \, |\,,$$

et donc :

$$N_{IJK} = \sum_{i_1+i_2+i_3+i=I} \; \sum_{j_1+j_2+j_3+j=J} \; \sum_{k_1+k_2+k_3+k=K} \frac{C_{j_1}^2 C_{k_1}^2 C_{i_2}^2 C_{k_2}^2 C_{i_3}^2 C_{j_3}^2 C_i^2 C_j^2 C_k^2}{C_I^7 C_J^7 C_K^7} \, | \, Q_{i_1 j_1 k_1} \quad Q_{i_2 j_2 k_2} \quad Q_{i_3 j_3 k_3} \quad Q_{ijk} \, |\,.$$

Comme pour le carreau quadrilatéral, on a le lemme suivant portant sur les N_{ij0}, les N_{i0k} et les N_{0jk}.

Lemme Les N_{ij0} sont nuls pour tous les couples (i,j), les N_{i0k} sont nuls pour tous les couples (i,k), et les N_{0jk} sont également nuls pour tous les couples (j,k). □

La démonstration est identique à celle du cas du quadrilatère. Par continuité, la relation $\mathcal{J}^*(u,v,w) = -\frac{uvw}{8}\mathcal{J}(u,v,w)$ reste vraie pour u, v ou w nul. Par suite, par exemple en faisant $w=0$, il vient :

$$\mathcal{J}^*(u,v,0) \;=\; \sum_{I=0,7} \sum_{J=0,7} B_I^7(u) B_J^7(v) N_{IJ0} \;=\; 0\,,$$

et donc les N_{IJ0} sont nuls. Le même raisonnement s'applique aux N_{i0k} et aux N_{0jk} et le lemme est démontré.

Par suite,

$$\mathcal{J}^*(u,v,w) \;=\; \sum_{I=0,7} \sum_{J=0,7} \sum_{K=0,7} B_I^7(u) B_J^7(v) B_K^7(w) N_{IJK}\,,$$

[6] le signe $-$ vient du produit $-\frac{u}{2}$, ...

devient :

$$\mathcal{J}^*(u,v,w) \;=\; \sum_{I=1,7}\sum_{J=1,7}\sum_{K=1,7} B_I^7(u)B_J^7(v)B_K^7(w)N_{IJK}\,,$$

ou encore :

$$\mathcal{J}^*(u,v,w) \;=\; \sum_{I=0,6}\sum_{J=0,6}\sum_{K=0,6} B_I^6(u)B_J^6(v)B_K^6(w)N_{I+1,J+1,K+1}\,,$$

le polynôme est de degré $6\times6\times6$ seulement et si on note :

$$\mathcal{J}(u,v,w) \;=\; \sum_{I=0,6}\sum_{J=0,6}\sum_{K=0,6} B_I^6(u)B_J^6(v)B_K^6(w)M_{IJK}\,,$$

on a :

$$M_{IJK} = 8N_{I+1,J+1,K+1}\,.$$

avec :

$$N_{IJK} = \sum_{i_1+i_2+i_3+i=I}\;\sum_{j_1+j_2+j_3+j=J}\;\sum_{k_1+k_2+k_3+k=K} \frac{C_{j_1}^2C_{k_1}^2C_{i_2}^2C_{k_2}^2C_{i_3}^2C_{j_3}^2C_i^2C_j^2C_k^2}{C_{I-1}^6C_{J-1}^6C_{K-1}^6}\,|\,Q_{i_1j_1k_1}\quad Q_{i_2j_2k_2}\quad Q_{i_3j_3k_3}\quad Q_{ijk}\,|\,.$$

À titre d'exemple, calculons le coefficient M_{000}. Pour ce coefficient, dans N_{IJK}, $I=J=K=1$ et on a la somme des indices qui vaut 1, ce qui fait qu'il y a 64 combinaisons possibles dont un grand nombre (heureusement) est trivialement nul. On va faire le calcul de manière symbolique (et à l'éditeur de texte !).

```
pour 1.. 0.. 0.. 0..
     11. 00. 00. 00.
        trois couples identiques --> pas de contribution
    10. 01. 00. 00.
        101 01. 00. 00.  nul
        100 011 00. 00.  nul
        100 010 001 000  facteur
        100 010 000 001  facteur
     10. 00. 01. 00.
        101 00. 01. 00.  nul
        100 001 010 000  facteur
        100 000 011 00.  nul
        100 000 010 001  facteur
     10. 00. 00. 01.
        101 00. 00. 01.  nul
        100 001 000 010  facteur
        100 000 001 010  facteur
        100 000 000 01.  nul

pour 0.. 1.. 0.. 0..
     01. 10. 00. 00.
        011 10. 00. 00.  nul
        010 101 00. 00.  nul
        010 100 001 000  facteur
        010 100 000 001  facteur
     00. 11. 00. 00.
        trois couples identiques --> pas de contribution
     00. 10. 01. 00.
        001 100 010 000  facteur
        000 101 01. 00.  nul
        000 100 011 00.  nul
        000 100 010 001  facteur
     00. 10. 00. 01.
        001 100 000 010  facteur
        000 101 000 01.  nul
        000 100 001 010  facteur
        000 100 000 01.  nul

pour 0.. 0.. 1.. 0..
     01. 00. 10. 00.
        011 00. 10. 00.  nul
        010 001 100 000  facteur
```

```
        010 000 101 00.  nul
        010 000 100 001  facteur
     00. 01. 10. 00.
        001 010 100 000  facteur
        000 011 10. 00.  nul
        000 010 101 00.  nul
        000 010 100 001  facteur
     00. 00. 11. 00.
        trois couples identiques --> pas de contribution
     00. 00. 10. 01.
        001 000 100 010  facteur
        000 001 100 010  facteur
        000 000 10. 01.  nul
        000 000 10. 01.  nul

pour 0.. 0.. 0.. 1..
     01. 00. 00. 10.
        011 00. 00. 10.  nul
        010 001 000 100  facteur
        010 000 001 100  facteur
        010 000 000 10.  nul
     00. 01. 00. 10.
        001 010 000 100  facteur
        000 011 000 10.  nul
        000 010 001 100  facteur
        000 010 000 10.  nul
     00. 00. 01. 10.
        001 000 010 100  facteur
        000 001 010 100  facteur
        000 000 01. 10.  nul
        000 000 01. 10.  nul
     00. 00. 00. 11.
        trois couples identiques --> pas de contribution
```

il ne reste donc que 24 termes à additionner en les affectant du facteur correspondant (il suffit de prendre $C^2_{j_1}C^2_{k_1}C^2_{i_2}C^2_{k_2}C^2_{i_3}C^2_{j_3}C^2_iC^2_jC^2_k$. Ci-dessous nous calculons ces facteurs :

```
        100 010 001 000  facteur 1
        100 010 000 001  facteur 2

        100 001 010 000  facteur 4
        100 000 010 001  facteur 4

        100 001 000 010  facteur 4
        100 000 001 010  facteur 2

        010 100 001 000  facteur 4
        010 100 000 001  facteur 8

        001 100 010 000  facteur 8
        000 100 010 001  facteur 8

        001 100 000 010  facteur 8
        000 100 001 010  facteur 4

        010 001 100 000  facteur 8
        010 000 100 001  facteur 8

        001 010 100 000  facteur 4
        000 010 100 001  facteur 4

        001 000 100 010  facteur 8
        000 001 100 010  facteur 8

        010 001 000 100  facteur 8
        010 000 001 100  facteur 4

        001 010 000 100  facteur 4
        000 010 001 100  facteur 2

        001 000 010 100  facteur 8
        000 001 010 100  facteur 8
```

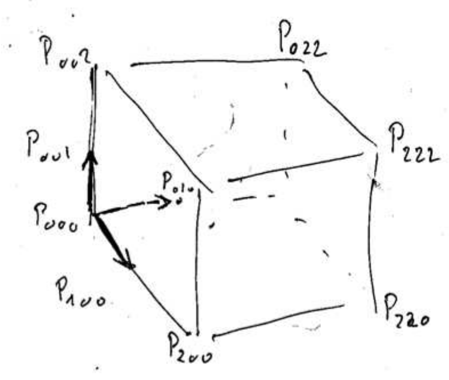

FIG. 12 – *Le coefficients* N_{000}.

Certains termes s'annulent, se soustraient ou s'ajoutent d'un simple coup d'œil, ne reste que :

```
        100 010 001 000   facteur 1

        000 010 001 100   facteur 2
```

que l'on réordonne, il vient :

```
        100 010 001 000   facteur 1

        000 010 001 100   facteur 2
  ou    001 000 010 100   facteur 2
  ou    001 010 100 000   facteur 2

donc ne reste que
        001 010 100 000   facteur 1
  ou    100 001 010 000   facteur 1
  ou -  100 010 001 000   facteur 1
```

soit

$$-|Q_{100} \quad Q_{010} \quad Q_{001} \quad Q_{000}|\,,$$

qui, en termes des P_{ijk} vaut :

$$-\omega_{000}\omega_{100}\omega_{010}\omega_{001}|\overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{010}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{001}}|\,,$$

qui est le résultat espéré puisque le signe $-$ était en facteur et donc disparait. Ainsi :

$$M_{000} = 8\omega_{000}\omega_{100}\omega_{010}\omega_{001}|\overrightarrow{P_{000}P_{100}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{010}} \quad \overrightarrow{P_{000}P_{001}}|\,.$$

Ce coefficient contrôle les tangentes en P_{000} des trois arêtes incidentes.

On admettra sans peine qu'il faut écrire un code pour calculer les coefficients de contrôle de cet élément.

6.3 Conclusion sur le carreau hexaédrique de degré 2

Le jacobien se comporte comme le polynôme :

$$\mathcal{J}^*(u,v,w) \;=\; \sum_{I=0,6}\sum_{J=0,6}\sum_{K=0,6} B_I^6(u)B_J^6(v)B_K^6(w)N_{IJK}\,,$$

avec, comme coefficient de contrôle :

$$8 \sum_{i_1+i_2+i_3+i=I+1}\;\sum_{j_1+j_2+j_3+j=J+1}\;\sum_{k_1+k_2+k_3+k=K+1} \frac{C_{j_1}^2 C_{k_1}^2 C_{i_2}^2 C_{k_2}^2 C_{i_3}^2 C_{j_3}^2 C_i^2 C_j^2 C_k^2}{C_I^7 C_J^7 C_K^7}\,|\,Q_{i_1j_1k_1} \quad Q_{i_2j_2k_2} \quad Q_{i_3j_3k_3} \quad Q_{ijk}\,|\,,$$

ou encore :

$$N_{IJK} = 8 \sum_{i_1+i_2+i_3+i=I+1} \sum_{j_1+j_2+j_3+j=J+1} \sum_{k_1+k_2+k_3+k=K+1} \frac{C^2_{j_1} C^2_{k_1} C^2_{i_2} C^2_{k_2} C^2_{i_3} C^2_{j_3} C^2_i C^2_j C^2_k}{C^6_I C^6_J C^6_K} \omega_{ijk} \omega_{i_1 j_1 k_1} \omega_{i_2 j_2 k_2} \omega_{i_3 j_3 k_3} \quad ...$$

$$... \, | \, \overrightarrow{P_{ijk} P_{i_1 j_1 k_1}} \quad \overrightarrow{P_{ijk} P_{i_2 j_2 k_2}} \quad \overrightarrow{P_{ijk} P_{i_3 j_3 k_3}} \, | \, ,$$

et les poids interviennent (sauf pour les coefficients réduits à un seul terme) pour contrôler le signe des coefficients et, ainsi, la validité de l'élément.

À noter que le degré est de 1 supérieur à celui du carreau classique, cf. [4].

6.4 Expression pour le carreau hexaédrique de degré 1

Par souci de complétude on donne les résultats relatifs à un carreau de degré 1. Il suffit de reprendre les grandes étapes des calculs précédents et de fixer le degré à 1. On a donc, successivement :

$$X = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B^1_i(u) B^1_j(v) B^1_k(w) \omega_{ijk} x_{ijk} \, ,$$

$$Y = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B^1_i(u) B^1_j(v) B^1_k(w) \omega_{ijk} y_{ijk} \, ,$$

$$Z = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B^1_i(u) B^1_j(v) B^1_k(w) \omega_{ijk} z_{ijk} \, ,$$

$$T = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B^1_i(u) B^1_j(v) B^1_k(w) \omega_{ijk} t_{ijk} \, ,$$

alors ce point de $\mathbb{R}^4$ est défini par un Bézier classique :

$$Q(u,v,w) = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B^1_i(u) B^1_j(v) B^1_k(w) Q_{ijk} \, ,$$

et on a (si O désigne l'origine) :

$$\mathcal{J}(u,v,w) \; = \; \frac{1}{D(u,v)^4} \, | \, \frac{\partial Q}{\partial u} \quad \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \overrightarrow{OQ} \, | \, ,$$

ensuite, on considère la combinaison (u, v et w non nuls) :

$$\mathcal{J}^*(u,v,w) \; = \; | \, \overrightarrow{OQ} - u \frac{\partial Q}{\partial u} \quad \overrightarrow{OQ} - v \frac{\partial Q}{\partial v} \quad \overrightarrow{OQ} - w \frac{\partial Q}{\partial w} \quad \overrightarrow{OQ} \, | \, ,$$

en notant que $\mathcal{J}^*(u,v,w) = -uvw\mathcal{J}^(u,v,w)$. La première colonne de ce nouveau déterminant se réduit. En effet :

$$\overrightarrow{OQ} - u \frac{\partial Q}{\partial u} = \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B^1_i(u) B^1_j(v) B^1_k(w) Q_{ijk} \; - \; u \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B^1_j(v) B^1_k(w) \Delta^{10Q}_{0jk} \, ,$$

soit :

$$\sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B^1_i(u) B^1_j(v) B^1_k(w) Q_{ijk} \; - \; u \sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B^1_j(v) B^1_k(w) (Q_{1,jk} - Q_{0jk}) \, ,$$

$$\sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B^1_j(v) B^1_k(w) \left\{ \sum_{i=0,1} B^1_i(u) Q_{ijk} \; - \; u(Q_{1,jk} - Q_{0jk}) \right\} \, ,$$

qui se réduit à :

$$\sum_{j=0,1} \sum_{k=0,1} B^1_j(v) B^1_k(w) Q_{0jk} \, ,$$

et un calcul analogue donne les colonnes 2 et 3, à savoir :

$$\sum_{i=0,1}\sum_{k=0,1} B_i^1(u)B_k^1(w)Q_{i0k}\,,$$

$$\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)Q_{ij0}\,,$$

par suite, le déterminant s'exprime en fonction des Q_{ijk} et non plus en fonction des $\Delta_{ijk}^{..Q}$ et uvw se factorise, ce qui va permettre de simplifier son expression. On examine ainsi le déterminant (au facteur[7] $-uvw$ près) :

$$|\sum_{j=0,1}\sum_{k=0,1} B_j^1(v)B_k^1(w)Q_{0jk} \quad \sum_{i=0,1}\sum_{k=0,1} B_i^1(u)B_k^1(w)Q_{i0k}$$

$$\sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)Q_{ij0} \quad \sum_{i=0,1}\sum_{j=0,1}\sum_{k=0,1} B_i^1(u)B_j^1(v)B_k^1(w)Q_{ijk}|\,,$$

ou, mieux :

$$\mathcal{J}^*(u,v,w) \;=\; \sum_{I=0,3}\sum_{J=0,3}\sum_{K=0,3} B_I^3(u)B_J^3(v)B_K^3(w) \sum_{i_2+i_3+i=I}\;\sum_{j_1+j_3+j=J}\;\sum_{k_1+k_2+k=K} \frac{1}{C_I^3C_J^3C_K^3}\cdots$$

$$\cdots|\,Q_{0,j_1k_1} \quad Q_{i_2j,0,k_2} \quad Q_{i_3j_3,0} \quad Q_{ijk}\,|\,,$$

et donc :

$$N_{IJK} = \sum_{i_2+i_3+i=I}\;\sum_{j_1+j_3+j=J}\;\sum_{k_1+k_2+k=K} \frac{1}{C_I^3C_J^3C_K^3}\,|\,Q_{0,j_1k_1} \quad Q_{i_2,0,k_2} \quad Q_{i_3j_3,0} \quad Q_{ijk}\,|\,.$$

Comme pour le carreau de degré 2, les N_{ij0}, les N_{i0k} et les N_{0jk} sont nuls. Par suite,

$$\mathcal{J}^*(u,v,w) \;=\; \sum_{I=0,3}\sum_{J=0,3}\sum_{K=0,3} B_I^3(u)B_J^3(v)B_K^3(w)N_{IJK}\,,$$

devient :

$$\mathcal{J}^*(u,v,w) \;=\; \sum_{I=1,3}\sum_{J=1,3}\sum_{K=1,3} B_I^3(u)B_J^3(v)B_K^3(w)N_{IJK}\,,$$

ou encore :

$$\mathcal{J}^*(u,v,w) \;=\; \sum_{I=0,2}\sum_{J=0,2}\sum_{K=0,2} B_I^2(u)B_J^2(v)B_K^2(w)N_{I+1,J+1,K+1}\,,$$

le polynôme est de degré $2 \times 2 \times 2$ seulement et si on note :

$$\mathcal{J}(u,v,w) \;=\; \sum_{I=0,2}\sum_{J=0,2}\sum_{K=0,2} B_I^2(u)B_J^2(v)B_K^2(w)M_{IJK}\,,$$

on a :

$$M_{IJK} = N_{I+1,J+1,K+1}\,.$$

avec :

$$N_{IJK} = \sum_{i_2+i_3+i=I}\;\sum_{j_1+j_3+j=J}\;\sum_{k_1+k_2+k=K} \frac{1}{C_{I-1}^2C_{J-1}^2C_{K-1}^2}\,|\,Q_{0,j_1k_1} \quad Q_{i_2,0,k_2} \quad Q_{i_3j_3,0} \quad Q_{ijk}\,|\,,$$

exprimé avec des déterminants 4×4 ou :

$$N_{IJK} = \sum_{i_2+i_3+i=I}\;\sum_{j_1+j_3+j=J}\;\sum_{k_1+k_2+k=K} \frac{\omega_{0,j_1k_1}\omega_{i_2,0,k_2}\omega_{i_3j_3,0}\omega_{ijk}}{C_{I-1}^2C_{J-1}^2C_{K-1}^2}\,|\,\overrightarrow{P_{ijk}P_{0,j_1k_1}} \quad \overrightarrow{P_{ijk}P_{i_2,0,k_2}} \quad \overrightarrow{P_{ijk}P_{i_3j_3,0}}\,|\,,$$

avec des déterminants 3×3.

[7] le signe $-$ vient du produit $-u$, ...

7 Conclusion

On a montré de plusieurs façons que le carreau de degré 1 avait un jacobien qui se comporte comme un polynôme identique à celui trouvé pour le carreau classique et que la condition de validité se résume à la convexité (les poids n'intervenant pas).

Pour le degré 2, on a montré que le jacobien se comportait comme un polynôme de degré 4 dans chaque direction dont nous avons donné la forme générique et nous avons donné l'expression formelle des coefficients pour ce degré (ou pour le degré 5 puisque ce sont les mêmes à un décalage d'indice près). Par contre, nous n'avons pas réussi à trouver la factorisation effective qui se cache derrière cette réduction de degré, le facteur se trouvant dans l'un ou l'autre des trois Bernstein en jeu. Un résultat vu au passage est que, pour ce carreau, les poids sont à considérer (sauf à imposer que chaque terme des coefficients est positif, ce qui donne une condition plus stricte).

Sur le papier, traiter un carreau volumique (un hexaèdre) se fait sans difficulté (!) comme on l'a vu dans la section précédente.

Le calcul des coefficients de contrôle permet donc de donner une condition suffisante de validité des éléments. La stricte positivité est nécessaire aux coefficients associés aux nœuds, la non négativité est suffisante pour les autres coefficients.

Références

[1] P. Bézier, *Courbes et surfaces, Mathématiques et CAO*, **4**, Hermès, Paris, 1986.

[2] G. Farin, *Curves and surfaces for CAGD. A practical guide.* 5^{th} edition, Academic Press, 2002.

[3] P.L. George et H. Borouchaki, Sur les éléments finis quadrilatéraux de degré 1 et 2 (version 2), *RR INRIA* **7964**, 2012.

[4] P.L. George et H. Borouchaki, Sur les éléments finis hexaédriques de degré 1 et 2, *RR INRIA* **8039**, 2012.

[5] P.L. George et H. Borouchaki, Sur les carreaux de Bézier rationnels de degré 2. Partie 2. *RR INRIA* **8202**, 2013.

[6] J.C. Léon, *Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO*, Hermès, 1991.

[7] L. Piegl and W. Tiller, *The NURBS Book*, Springer, 1997.

RESEARCH CENTRE
PARIS – ROCQUENCOURT

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Publisher
Inria
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
inria.fr

ISSN 0249-6399